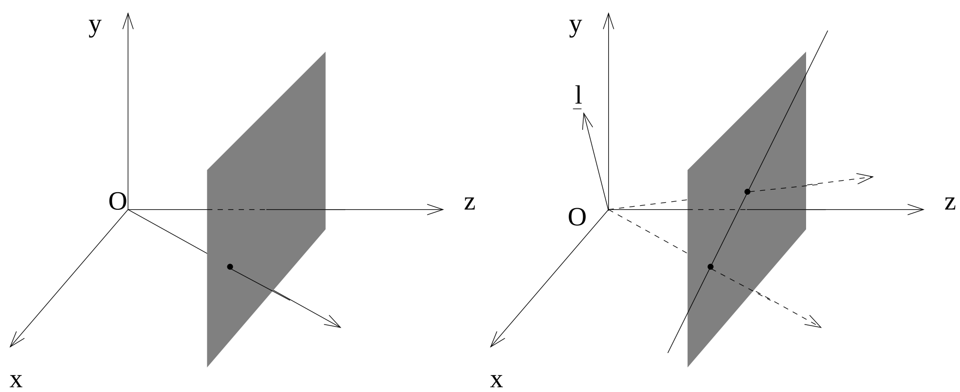
Glossar

Projektive Ebene $\mathbb{P}^2$

1. **projektiver Raum** $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^t\}$ mit Äquivalenzrelation!
   (a) ein Punkt $\mathbf{x}$ liegt auf einer Geraden $\mathbf{l}$ gdw $\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{l} = 0$
   (b) der Schnittpunkt zweier Geraden $\mathbf{l}$ und $\mathbf{l}'$ ist gegeben als $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$
   (c) für eine homogene Gerade $(a, b, c)^t$ gilt:
   $(b, -a)^t$ zeigt in die Richtung der Geraden, $(a, b)^t$ ist die Normale der Geraden
   (d) Verbindung $\mathbf{l}$ zweier Punkte: $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$
   $(x_1, y_1, z_1)^t \times (x_2, y_2, z_2)^t = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)^t$
   (e) **ideale Punkte** (im Unendlichen): $(x_1, x_2, 0)^t$
   (f) **Gerade im Unendlichen**: $l_\infty = (0, 0, l_3)^t$
2. **Modell der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2$
   (a) Punkte entsprechen einer Geraden durch den Ursprung von $\mathbb{R}^3$, die im zugehörigen Punkt die Ebene durchstößt
   (b) ideale Punkte liegen in der x-y-Ebene
   (c) eine Gerade entspricht der Ebene, die durch die Gerade (auf der Ebene) und dem Ursprung gebildet wird; der zugehörige (homogene) Vektor steht senkrechtauf dieser Ebene
   (d) l_∞ ist mit der z-Achse identifiziert, d.h. die zugehörige Ebene ist identisch mit der x-y-Ebene



3. Kegelschnitte
   (a) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

(b) $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$

(c) $\mathbf{x}^t C\mathbf{x}$, mit $C = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$

(d) die Gerade $\mathbf{l} = C\mathbf{x}$ ist die Tangente des conic C im Punkt $\mathbf{x}$

(e) eine Gerade $\mathbf{l}^t C^* \mathbf{l} = 0$ ist eine Tangente des conic C,
C^* ist der **duale Kegelschnitt (von Geraden)** zu C
wobei C^* die *adjoint matrix* zu C ist
falls C vollen Rang, dann gilt: $C^* = C^{-1}$

(f) degenerierte (Punkt-)Kegelschnitte:
$C = \mathbf{lm}^t + \mathbf{ml}^t$, wobei $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ beliebige Gerade sind, deren Punkte gerade auf dem Kegelschnitts liegen (Rang 2)

4. Projektivität = Collineation = Homographie = projektive Abbildung

   (a) invertierbare Abbildung von $\mathbb{P}^2$ nach $\mathbb{P}^2$
   (b) lineare Abbildung $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$, mit invertierbare 3×3 Matrix H
   (c) für Geraden: $\mathbf{l}' = {H^{-1}}^t \mathbf{l}$
   (d) für Kegelschnitt: $C' = {H^{-1}}^t C H^{-1}$
   (e) für dualen (Geraden-)Kegelschnitt: $C^{*\prime} = HC^*H^t$

5. Hierarchie von Transformationen

Isometrie

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \epsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_E\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Ähnlichkeit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_S\mathbf{x} = \begin{pmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

affin

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

wobei A eine nicht-singuläre 2×2 Matrix ist

projektiv

$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^t & v \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Projektiver Raum $\mathbb{P}^3$

1. **Ebene im Undendlichen** $\pi_\infty = (0,0,0,1)^t$

2. **Wirkung** einer Projektivität:

   (a) lineare Abbildung $\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$, mit invertierbare 3×3 Matrix H

   (b) für Ebenen: $\pi' = {H^{-1}}^t \pi$

   (c) für quadrics: $Q' = {H^{-1}}^t Q H^{-1}$

3. Hierarchie von Transformationen

   Euklidisch

   $$H_E = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

   wobei R eine orthonormale 3×3 Rotations-Matrix ist

   Ähnlichkeit

   $$H_S = \begin{pmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

   affin

   $$H_A = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

   wobei A eine nicht-singuläre 3×3 Matrix ist

   projektiv

   $$H = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^t & v \end{pmatrix}$$