3 Vorverarbeitung

Vorverarbeitung soll ein Muster transformieren, so daß es für die weitere

- Verarbeitung *besser geeignet* ist.
- in der Praxis (meist) heuristisch beurteilen

Ziele

- Qualität verbessern
  - Störungen, Rauschen eliminieren
- Variabilität der Muster
  - klein innerhalb derselben Klasse
  - groß zwischen Klassen

3.1 Binarisieren (von Bildern) mit Schwellwertoperationen

Binarisieren ist sinnvoll, wenn die Grauwertinformation unwichtig ist

Ziel: 1 für Objekt
0 für Hintergrund

Schwellwertoperation (wobei $f_{jk} \in \{0, \ldots, L-1\}$)

$$h_{jk} = \begin{cases} 1 & f_{jk} > \vartheta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schwellwert ϑ kann bestimmt werden

- global
- lokal

Histogramm

absolutes Histogramm: $Q_l :=$ Anzahl der (j,k) mit $f_{jk} = l$

relatives Histogramm: $q_l := \dfrac{Q_l}{\sum_k Q_k}$

3.1.1 mittlerer Grauwert

$$\theta = \sum_{l=0}^{l=L-1} q_l \cdot l$$

3.1.2 absolutes Minimum des Grauwerthistogramms

$$\theta = \operatorname*{argmin}_{l} q_l$$

3.1.3 Hauptsenke des Grauwerthistogramms

- zentralstes relatives Minimum
- absolutes Minimum in eingeschränktem Interval $[l_u, l_o]$

3.1.4 Optimaler Schwellwert

per statistische Betrachtung

Notation:

schätze Wahrscheinlichkeit für den Grauwert l mit relativem Histogramm:

$$p_l \sim q_l$$

wird geschätzt mit dem Histogramm (relative Häufigkeiten)

Der gesuchte Schwellwert zerteilt das Bild in zwei Klassen Ω_1, Ω_2:

$$\Omega_1 := \{jk | f_{jk} \leq \vartheta\} \qquad \Omega_2 := \{jk | f_{jk} > \vartheta\}$$

Klassenwahrscheinlichkeiten: $p(\Omega_1) := \sum_{l=0}^{\vartheta} q_l, \quad p(\Omega_2) := 1 - p(\Omega_1)$

Mittelwerte:

$\mu := \sum_{l=0}^{L-1} q_l \cdot l$ (Gesamtbild) $\qquad \mu_1 := \sum_{l=0}^{\vartheta} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_1)}, \quad \mu_2 := \sum_{l=\vartheta+1}^{L-1} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_2)}$

Optimalitäts Kriterium

$$J = p(\Omega_1)(\mu_1 - \mu)^2 + p(\Omega_2)(\mu_2 - \mu)^2$$

Beachte: $p(\Omega_1)$, $p(\Omega_2)$, μ_1, μ_2 und J von ϑ abhängig !

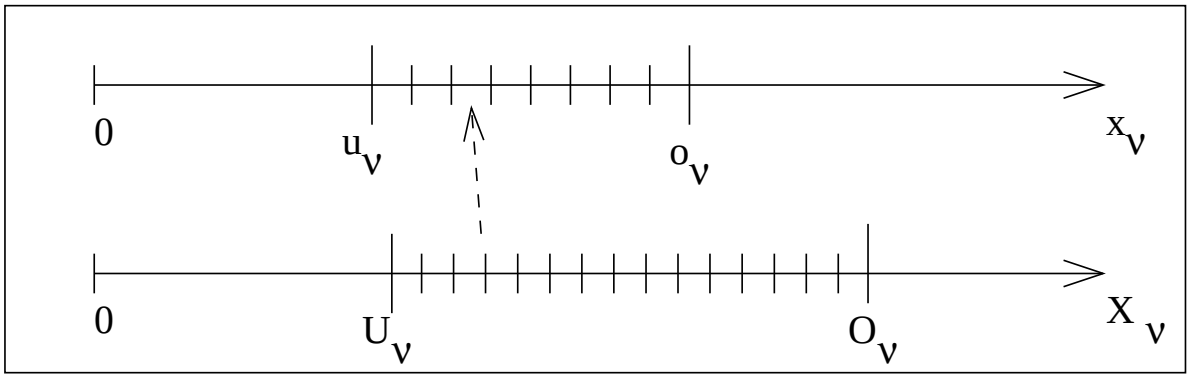
- wähle das ϑ als optimalen Schwellwert, das J maximiert
  (teste systematisch alle möglichen ϑ)
- J versucht μ_1 und μ_2 weitweg von μ zu wählen und gleichzeitig viel in die Klassen rein zu bekommen
- μ_1, μ_2 approxmieren das Histogramm mit zwei Werten mit minimalen quadratischem Fehler

3.2 Normierung

3.2.1 Größe

Ziel: transformiere ${}^{\rho}\vec{f}(\vec{x})$, sodaß

- das Interval $[u_\nu, o_\nu]$ aller Werte $\neq 0$ der ν-te Komponente von $\vec{x}$
- im (festen) Intervall $[U_\nu, O_\nu]$ liegt



Lineare Transformation: $x_\nu = \frac{o_\nu - u_\nu}{O_\nu - U_\nu}(X_\nu - U_\nu) + u_\nu$

Abtastwerte neu bestimmen

1. lineare Interpolation
2. fasse dieses Problem als erneute Abtastung auf, rekonstruiere die ursprüngliche kontinuierliche Funktion und taste neu ab (Fouriertransformation)

3.2.2 Normierung von Mittelwert und Streuung

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_j$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (f_j - \hat{\mu})^2$$

$$h_j = \frac{f_j - \mu}{\hat{\sigma}}$$

für $\vec{h}$ gilt : Mittelwert = 0
Streuung = 1
ist approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$ (normal-)verteilt

3.2.3 Normierung der Energie

Energie in einem “Fenster” mit M Abtastwerten $j, j+1, \ldots, j+M-1$:

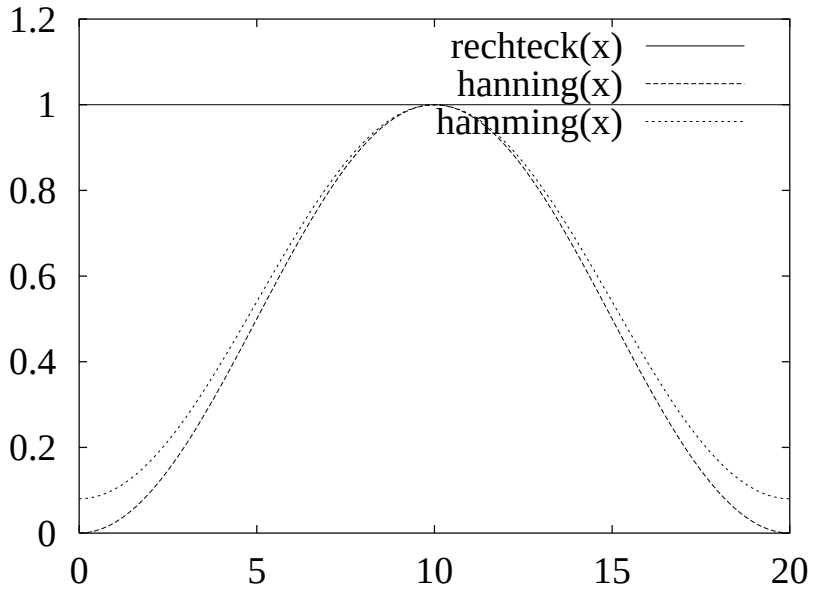
$$A_j = \sum_{\nu=0}^{M-1} |\alpha_\nu f_{j+\nu}|$$

Die α_ν bestimmen ein “Fenster”, z.B.:

Rechteckfenster	$\alpha_\nu = 1$
Hammingfenster	$\alpha_\nu = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$
Hanningfenster	$\alpha_\nu = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$

$$h_\nu = \frac{f_\nu}{A_j} \quad \nu = j, j+1, \ldots, j+(M-1)$$

damit ist die Energie der h_ν im Fenster auf 1 normiert



3.2.4 Normierung von/mit Momenten

für kontinuierliche Muster

führe *mehrere Schritte* $f(x, y) \rightarrow h(x', y')$ durch

Definition Momente:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y)\, dx\, dy$$

$$m_{pq} = \sum_{i+0}^{N-1} \sum_{j+0}^{M-1} i^p \; j^q \; f_{i,j}$$

Schritt 1 Verschiebung in den Schwerpunkt und Normierung der “Masse”

$$
\begin{aligned}
x_s &= \frac{m_{10}}{m_{00}} \\
y_s &= \frac{m_{01}}{m_{00}} \\
m_{00} &: \text{Summe derAbtastwerte, Masse} \\
m_{10} &: \text{Massenschwerpunkt in x-Richtung} \\
m_{01} &: \text{Massenschwerpunkt in y-Richtung} \\
(x', y') &= (x - x_s, y - y_s) \\
h(x', y') &= \frac{f(x', y')}{m_{00}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ für $h(x', y')$ gilt:

$$
\begin{aligned}
m_{00} &= 1 \\
m_{01} &= m_{10} = 0
\end{aligned}
$$

Schritt 2 Skalierung

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{m_{02} + m_{20}} \\ (x', y') &= \frac{1}{r}(x, y) \\ h(x', y') &= r^2 f(x', y') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $h(x', y')$ gilt:

$$\begin{aligned} m_{02} + m_{20} &= 1 \\ m_{20} &: \text{Streuung in x-Richtung} \\ m_{02} &: \text{Streuung in y-Richtung} \end{aligned}$$

Schritt 3 Drehung

suche α, so daß

$$\tan(2\alpha) = 2\frac{m_{11}}{m_{20} - m_{02}}$$

wobei aus den vier Lösungen diejenige ausgesucht wird, für die das um α rotierte Muster folgende Ungleichungen erfüllt sind:

1. $m_{20} < m_{02}$
2. $m_{21} > 0$

(wobei das die Momente der bereits um α rotierten Muster sind)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ h(x', y') &= f(x', y') \\ \Rightarrow m_{11} &= 0 \end{aligned}$$

das bedeutet, daß die x und y Koordinaten maximal dekorreliert sind

Schritt 4 Spiegelung an der y-Achse, so daß $m_{12} > 0$

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{cases} -1 & m_{12} \leq 0 \\ 1 & m_{12} > 0 \end{cases} \\ x' &= \beta x \\ y' &= y \\ \Rightarrow m_{12} &> 0 \end{aligned}$$

3.3 Anwendung von linearen Systemen

3.3.1 Lineare System

wir betrachten lineare Systeme (diskrete Form):

$$[f] \rightarrow \boxed{\text{T}} \rightarrow [g] = T\{[f]\}$$

Definition eine Transformation T heißt linear, wenn für alle Folgen $[f]$ und $[g]$ und alle Skalare a und b gilt:

$$T\{a \cdot [f] + b \cdot [g]\} = a \cdot T\{[f]\} + b \cdot T\{[g]\}$$

Definition die Impulsantwort $[g_\mu]$ eines linearen Systems ist definiert als

$$[g_\mu] := T\{[\delta_\mu]\}$$

wobei $[\delta_\mu]$ der Einheitsimpuls an der Stelle μ ist, d.h. eine Folge, die an der Position μ eine 1 hat, sonst nur Nullen

Definition eine lineares System T hießt verschiebungsinvariant, falls für alle j und μ gilt:

$$g_\mu[j] = g_0[j - \mu]$$

(d.h. $[g_\mu]$ entsteht aus $[g_0]$ durch Verschiebung um μ Positionen)

$[g_0]$ heißt dann Impulsantwort $[g]$ von T

Definition die Faltung $[h] = [f] * [g]$ zweier Folgen $[f]$ und $[g]$ ist gegeben als:

$$h[j] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f[k] \cdot g[j - k]$$

Satz für jedes verschiebungsinvarinante lineare System T mit der Impulsanwort $[g]$

$$T\{[f]\} = [f] * [g]$$

3.3.2 Fouriertransformation und Faltungssatz

jede 2π periodische Funktion kann durch Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden (Fourierreihe):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)) \quad \text{mit } f(t), a_\nu, b_\nu \in R$$

Darstellung als komplexe Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu t} \quad \text{mit } c_\nu \in C$$

bei unendlicher Periode (d.h. beliebige Funktion)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iut} du$$

wobei die $c(u)$ durch die Fourier-Transformation gegeben sind:

$$F(u) := c(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-uit}dt \quad \text{mit } F(u) \in C$$

Bemerkungen:

- aus $F(u)$ kann $f(t)$ exakt rekonstruiert werden
- $F(u)$ beschreibt für die Frequenz u die Amplitude (Betrag von $F(u)$ und die Phasenverscheibung (Winkel von $F(u)$)
- Erweiterung für beliebig-dimensionale Funktionen

Definition die diskrete Fouriertransformation (DFT)
einer endlichen 2-dimensionale, diskrete Funktion $f_{jk} = f(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta y)$
für $0 \leq j < M_x$, $0 \leq k < M_y$ ist definiert als:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{M_x-1} \sum_{k=0}^{M_y-1} f_{jk} e^{-2i\pi\left(\frac{j\mu}{M_x}+\frac{k\nu}{M_y}\right)}$$

Die Inverse ist gegeben mit:

$$f_{jk} = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{\nu=0}^{M_x-1} \sum_{\mu=0}^{M_y-1} F_{\mu\nu} e^{2i\pi\left(\frac{j\mu}{M_x}+\frac{k\nu}{M_y}\right)}$$

Interpretation für periodisch fortgesetze Folge wie Fouriertransformation

Definition die zyklische Faltung h_{jk} zweier endlicher, 2-dimensionaler, diskreter Funktionen f_{jk} und g_{jk} ist definiert als ($h = f * g$):

$$h_{jk} = \sum_{l=0}^{M_x-1} \sum_{m=0}^{M_y-1} f_{l,m} \cdot g_{j-l \bmod M_x \, , \, k-m \bmod M_y}$$

Faltungssatz für endliche Folgen f, g, h mit $h = f * g$ und deren DFTs F, G, H gilt:

$$H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cdot G_{\mu\nu}$$

- Störungen reduzieren $\vec{f} = \vec{s} + \vec{n}$
  (Signal $\vec{s}$, Störung $\vec{n}$)
- wichtige Anteile hervorheben

über Betrachtung der Frequenzeigenschaften

3.3.3 Idealer Tiefpaßfilter

kontinuierlich:

- mit realen Bauteilen nicht realisierbar

diskret:

- ringing
- negative gefilterte Abtastwerte möglich

Alternative (als Tiefpaß): Gaußglocke

- kein idealer Frequenzgang
- kein ringing

Mittelung (als Tiefpaß)

$$h_{jk} = \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=-m}^{m} \sum_{\nu=-n}^{n} f_{j+\mu\,,\,k+\nu}$$

Frequenzgang (1D): schlecht!

Mittelung über mehrere Perioden, wenn mehrere Realisierungen des Musters vorliegen

$$h_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{\rho=1}^{N} {}^{\rho} f_{jk}$$

gut z.B. für EEG, Motorgeräusche

Numerische Differentiation

1. Ableitung in X-Richtung:

$${}^{x} f_{jk} = f_{jk} - f_{j+1,k}$$

1. Ableitung in Y-Richtung:

$${}^{y} f_{jk} = f_{jk} - f_{j,k+1}$$

Problem:

- nicht symmetrisch um j, k

Betrag des Gradienten:

$$h_{jk} = \sqrt{{}^{x}f_{jk}^2 + {}^{y}f_{jk}^2}$$

oder

$$h_{jk} = |{}^{x}f_{jk}| + |{}^{y}f_{jk}|$$

Diskreter Laplace Operator

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

diskret:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0