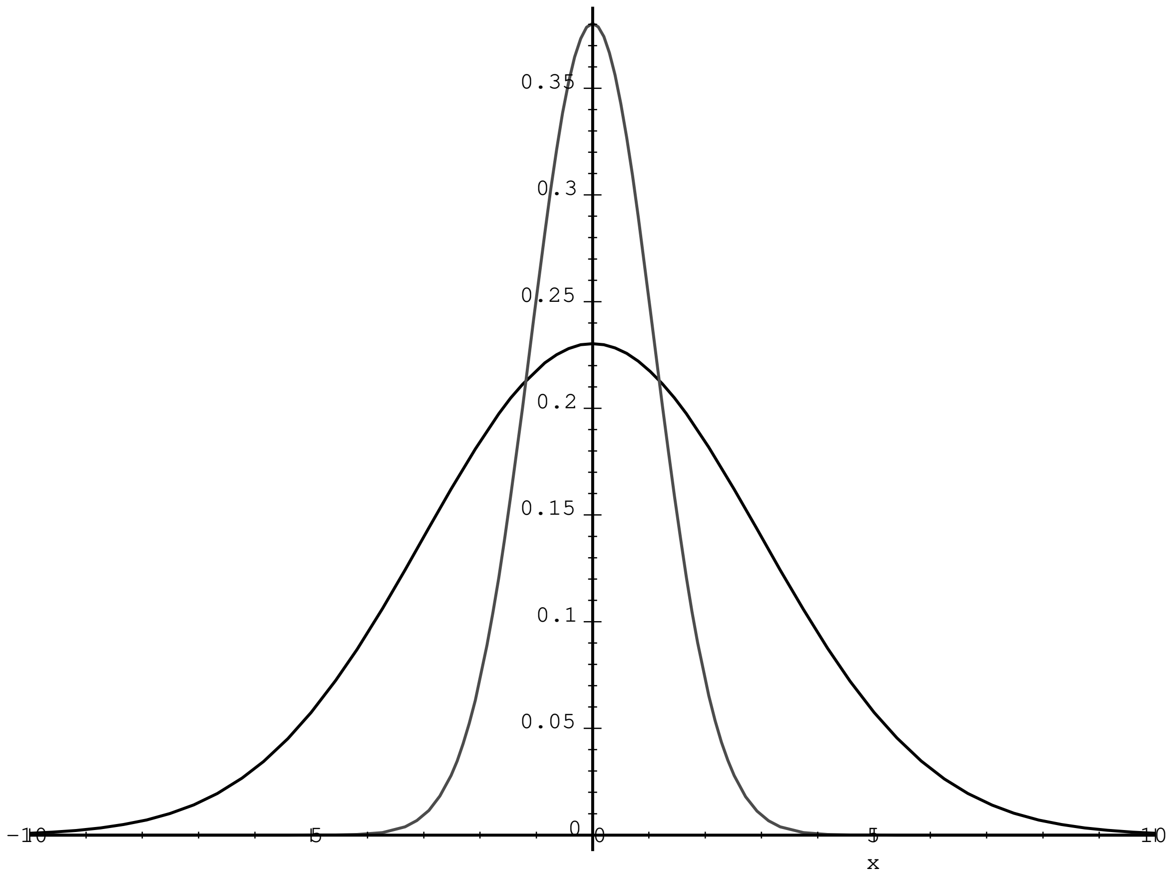
6.6 Klassifikation mittels Schätzen von Verteilungen

6.6.1 Normalverteilung

Um die Verteilung einer Zufallsvariable X zu modellieren, geht man oft davon aus, daß sie *normalverteilt* ist, d.h.

$$P(X = x) = \mathcal{N}_x(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- $\mu = E\{X\}$ Erwartungswert von X
  bestimmt das Zentrum der Normalverteilung
- $\sigma^2 = E\left\{(X-\mu)^2\right\}$ Varianz
  bestimmt Breite und Höhe der Kurve
- Ist die Näherung durch eine einfache Normalverteilung nicht geeignet, so lassen sich in den allermeisten Fällen durch einfache Übelagerung mehrerer Normalverteilungen gute Ergebnisse erzielen.

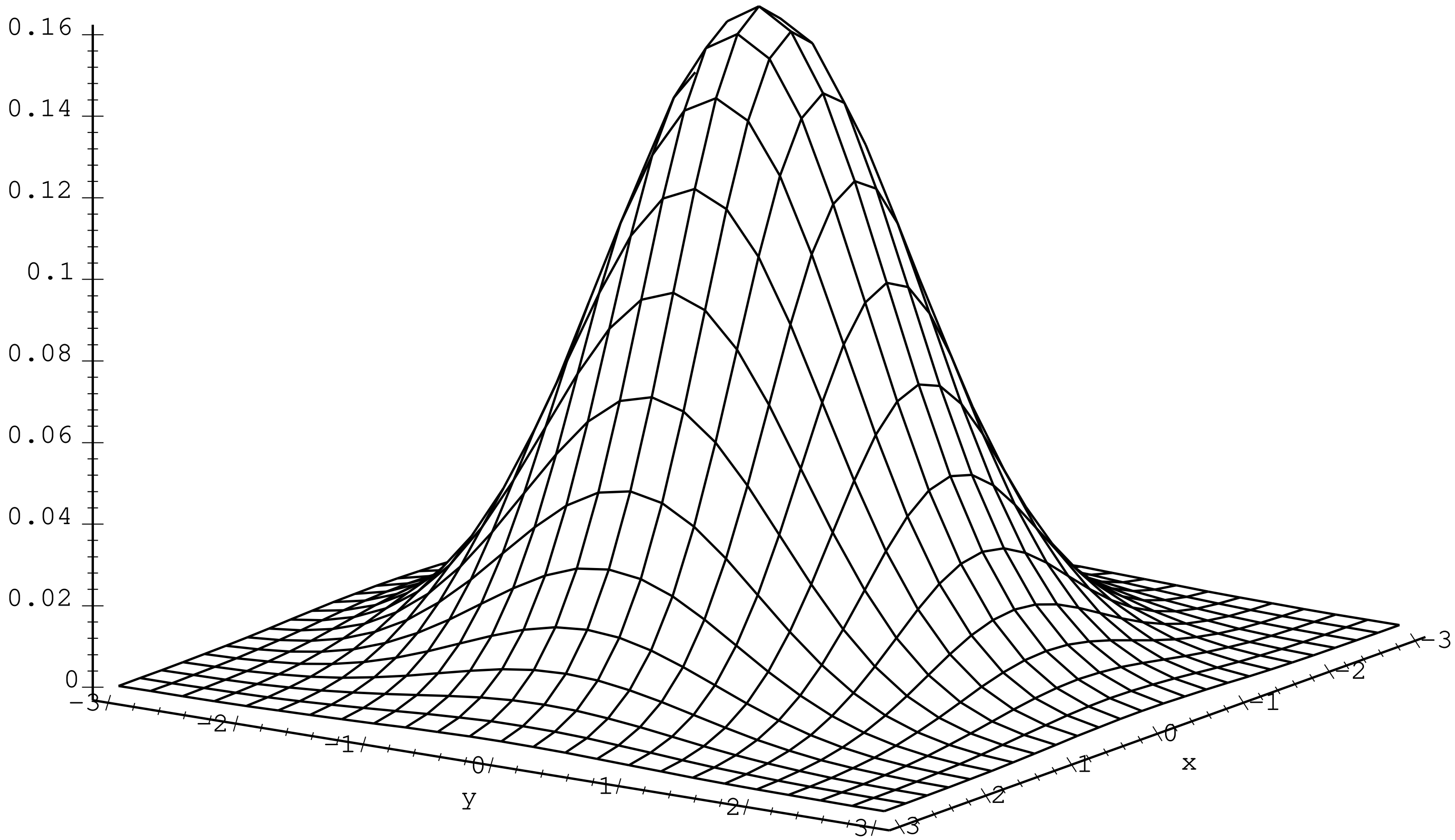


Beispiel zweier Normalverteilungen im $\mathbb{R}^1$

Ist die Zufallsvariable ein N-dimensionaler Vektor $\vec{c}$, so gilt

$$P(\vec{c}) = \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}, \underline{K}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \text{det}\underline{K}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{\mu})^T \underline{K}^{-1}(\vec{c}-\vec{\mu})}$$

- $\vec{\mu} = E\{\vec{c}\}$ Erwartungswert von $\vec{c}$
- $\underline{K} = E\left\{(\vec{c} - \vec{\mu})(\vec{c} - \vec{\mu})^T\right\}$ die Kovarianzmatrix.
- Zentrum der Normalverteilung ist — wie im $\mathbb{R}^1$ — durch den Erwartungswert $\vec{\mu}$ gegeben
- im $\mathbb{R}^2$ haben Normalverteilungen eine Glockenform
  horizontale Schnitte durch diese Glocke sind entweder kreis- oder ellipsenförmig



Beispiel einer zweidimensionalen Normalverteilung

6.6.2 Parameterschätzung

schätze Mittelwert $\vec{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\underline{K}$ aus einer Stichprobe der Größe I:

$$\widehat{\vec{\mu}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \vec{c}_i$$

$$\underline{\widehat{K}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} (\vec{c}_i - \widehat{\vec{\mu}})(\vec{c}_i - \widehat{\vec{\mu}})^T \text{ bzw.} \frac{1}{I-1} \text{ für erwartungstreue Schätzung}$$

Rekursive Berechnung

Es kommt häufig vor, daß die Menge der Trainingsmuster erweitert werden soll:

- neues klassifiziertes Trainingsmaterial vorhanden
- durchführen von entscheidungsüberwachtem Lernen

Da es für umfangreiche Stichproben sehr aufwendig ist, bei jeder Erweiterung die Parameter $\widehat{\vec{\mu}}$ und $\underline{\widehat{K}}$ vollständig neu zu berechnen, ist eine rekursive Formel für die Schätzwerte von großem Vorteil.

Formel für die rekursive Berechnung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}
\widehat{\vec{\mu}}_I &= \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\vec{c}_i \\
&= \frac{1}{I}\left(\sum_{i=1}^{I-1}\vec{c}_i\right) + \frac{1}{I}\vec{c}_I \\
&= \frac{1(I-1)}{I(I-1)}\left(\sum_{i=1}^{I-1}\vec{c}_i\right) + \frac{1}{I}\vec{c}_I \\
&= \frac{I-1}{I}\cdot\left(\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I-1}\vec{c}_i\right) + \frac{1}{I}\vec{c}_I \\
&= (1-\frac{1}{I})\cdot\widehat{\vec{\mu}}_{I-1} + \frac{1}{I}\vec{c}_I
\end{aligned}$$

Ähnlich läßt sich die Formel für die Kovarianzmatrix herleiten:

$$\underline{\widehat{K}}_I = (1 - \frac{1}{I})[\underline{\widehat{K}}_{I-1} + \frac{1}{I}(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})^T]$$

Sogar für die Inverse der Kovarianzmatrix gibt es eine inverse Formel:

$$\underline{\widehat{K}}_I^{-1} = \frac{I}{I-1}[\underline{\widehat{K}}_{I-1}^{-1} - \frac{1}{I}\frac{\underline{\widehat{K}}_{I-1}^{-1}(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})^T\underline{\widehat{K}}_{I-1}^{-1}}{1 + \frac{1}{I}(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})^T\underline{\widehat{K}}_{I-1}^{-1}(\vec{c}_I - \widehat{\vec{\mu}}_{I-1})}]$$

6.6.3 Bayes-Normalverteilungsklassifikator

Annahme: $P(\vec{c} \mid \omega_i) = \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_i, \underline{K_i})$

- schätze klassenspezifischen Mittelwerte $\vec{\mu}_l$ und Kovarianzmatrizen $\underline{K}_l$ aus klassifizierter Stichprobe
- für Schätzung von $\vec{\mu}_l$ und $\underline{K}_l$ verwende nur die Merkmalsvektoren $\vec{c}_i$, die aus der Klasse ω_l stammen
- für die Unterscheidungsfunktion des Bayes-Klassifikators benötigt man jedoch die Wahrscheinlichkeiten $P(\omega_i \mid \vec{c})$

  gemäß dem Gesetz von Bayes und Randdichten gilt jedoch:

$$P(\omega_i \mid \vec{c}) = \frac{P(\vec{c} \mid \omega_i)P(\omega_i)}{P(\vec{c})} = \frac{P(\vec{c} \mid \omega_i)P(\omega_i)}{\sum\limits_{l=1}^{K} P(\vec{c}, \omega_l)} = \frac{P(\vec{c} \mid \omega_i)P(\omega_i)}{\sum\limits_{l=1}^{K} P(\vec{c} \mid \omega_l)P(\omega_l)}$$

- verwendet man den Bayes-Klassifikator ohne Rückweisung, so reduziert sich der Rechenaufwand deutlich:
  $P(\vec{c})$ kann als Konstante vernachlässigt werden, damit ergibt sich:
  Die i-te Komponente $d_i(\vec{c})$ der Unterscheidungsfunktion $\vec{d}(\vec{c})$ hat dann die Form

$$d_i(\vec{c}) = p(\vec{c} \mid \omega_i) \cdot P(\omega_i) = \frac{P(\omega_i)}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\underline{K}_i)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{\mu}_i)^T \underline{K}_i^{-1}(\vec{c}-\vec{\mu}_i)}$$

- die Rangordnung der Ergebnisse der Unterscheidungsfunktion ändert sich nicht (bzw. dreht sich um), wenn
  - man sie mit positiven (negativen) Konstanten multipliziert
  - oder Konstanten addiert
  - oder Logiarithmiert

  damit:

$$d_i'(\vec{c}) \;=\; \underbrace{-2\ln(P(\omega_i)) + \ln(\det(\underline{K}_i))}_{\text{Konstante } b_{0i}} + \underbrace{(\vec{c}-\vec{\mu}_i)^T \underline{K}_i^{-1}(\vec{c}-\vec{\mu}_i)}_{\text{je Klass. zu berechnen}}$$

- Bayesklassifikator für normalverteilte Klassen ist also ein *quadratischer* Klassifikator (Aufwand $O(N^2)$ mit $N = \text{dim}(\vec{c})$)
- mit der Unterscheidungsfunktion

$$\vec{d}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} b_{01} + (\vec{c} - \vec{\mu}_1)^T \underline{K}_1^{-1} (\vec{c} - \vec{\mu}_1) \\ \vdots \\ b_{0i} + (\vec{c} - \vec{\mu}_i)^T \underline{K}_i^{-1} (\vec{c} - \vec{\mu}_i) \\ \vdots \\ b_{0K} + (\vec{c} - \vec{\mu}_K)^T \underline{K}_K^{-1} (\vec{c} - \vec{\mu}_K) \end{pmatrix}$$

  wird das Risiko mit folgender Entscheidungsregel minimiert:

$$g(\vec{c}) = \hat{\omega} = e(\vec{d}(\vec{c})) = \omega_l, \quad \text{falls } l \textit{ minimale} \text{ Komponente von } \vec{d}(\vec{c})$$

- Berechtigung der Annahme normalverteilter Klassen:
  - statistische Tests
  - Annahme anhand des Klassifikationsergebnisses auf einer Teststichprobe evaluieren
    (liefert jedoch keine Aussage über Annahme der Normalverteilung)

6.6.4 Vereinfachung durch identische Kovarianzmatrizen

Annahme: die Kovarianzmatrizen aller Klassen sind ω_i identisch

- dann vereinfacht sich $d'_i(\vec{c})$ weiter, da $\ln(\text{det}(\underline{K}))$ nun konstant:

$$\begin{aligned} d'_i(\vec{c}) &= -2\ln(P(\omega_i)) + (\vec{c} - \vec{\mu}_i)^T \underline{K}^{-1}(\vec{c} - \vec{\mu}_i) \\ &= -2\ln(P(\omega_i)) + \vec{c}^T \underline{K}^{-1}\vec{c} - 2\vec{\mu}_i^T \underline{K}^{-1}\vec{c} + \vec{\mu}_i^T \underline{K}^{-1}\vec{\mu}_i \end{aligned}$$

- Der Term $\vec{c}^T \underline{K}^{-1}\vec{c}$ kann ebenfalls vernachlässigt werden:

$$d'_i(\vec{c}) = \underbrace{-2\ln(P(\omega_i)) + \vec{\mu}_i^T \underline{K}^{-1}\vec{\mu}_i}_{b_{1i}} - \underbrace{2\vec{\mu}_i^T \underline{K}^{-1}}_{b_{2i}} \vec{c}$$

- mit der Unterscheidungsfunktion

$$\vec{d}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{21}\vec{c} \\ \vdots \\ b_{1i} - b_{2i}\vec{c} \\ \vdots \\ b_{1K} - b_{2K}\vec{c} \end{pmatrix}$$

  so wird das Risiko minimiert, falls man folgende Entscheidungsregel anwendet:

$$g(\vec{c}) = \hat{\omega} = e(\vec{d}(\vec{c})) = \omega_l, \quad \text{falls } l \textit{ minimale} \text{ Komponente von } \vec{d}(\vec{c})$$

- Bayesklassifikator für normalverteilte Klassen mit identischer Kovarianzmatrix ist also ein *linearer* Klassifikator (Aufwand $O(N)$ mit $N = \dim(\vec{c})$)
  $\Rightarrow$ oft deutliche Rechenzeitersparnis, da Merkmalsvektoren mit 10 bis 100 Dimensionen nicht selten

6.6.5 Klassengrenzen

- ein Merkmalsvektor $\vec{c}$ liegt auf einer Klassengrenze, falls mehrere Komponenten der Unterscheidungsfunktion $\vec{d}(\vec{c})$ den gleichen (maximalen bzw. minimalen) Wert annehmen:

$$\begin{aligned} d_\kappa(\vec{c}) &= d_\lambda(\vec{c}) \ \Leftrightarrow \\ d_\kappa(\vec{c}) - d_\lambda(\vec{c}) &= 0 \end{aligned}$$

- Einsetzen für Bayesklassifikators mit Normalverteilungen ergibt:

$$d_\kappa(\vec{c}) - d_\lambda(\vec{c}) \ = \ b_{0\kappa} + (\vec{c} - \vec{\mu}_\kappa)^T \underline{K}_\kappa^{-1} (\vec{c} - \vec{\mu}_\kappa) - b_{0\lambda} - (\vec{c} - \vec{\mu}_\lambda)^T \underline{K}_\lambda^{-1} (\vec{c} - \vec{\mu}_\lambda) = 0$$

- läßt sich durch geeignete Transformationen zu einem einzigen quadratischen Ausdruck umformen

  $\Rightarrow$ alle Klassengrenzen sind Ellipsen (Ellipsoide), Parabel (Paraboloide) oder Hyperbeln (Hyperboloide)

- Bayesklassifikator für Normalverteilungen mit identischen Kovarianzmatrizen:

$$d_\kappa(\vec{c}) - d_\lambda(\vec{c}) \;=\; b_{1\kappa} - b_{2\kappa}\vec{c} - b_{1\lambda} + b_{2\lambda}\vec{c}$$

  diese Gleichung ist linear
  $\Rightarrow$ Klassengrenzen sind durch Geraden, Flächen oder Hyperflächen gegeben

6.6.6 Mischverteilungen

- Verteilung wird durch Linearkombination von verschiedenen (Normal)verteilungen beschrieben:

  $$P(\vec{c} \mid \omega_i) = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$$

  wobei $\vec{\theta} = (a_1, \vec{\mu}_1, \underline{K}_1, \ldots, a_L, \vec{\mu}_L, \underline{K}_L)$ die Mischverteilung (hier der Klasse ω_i) beschreibt
- Schätzen im Prinzip wie k-means, wobei nun jedes Gebiet R_l bzw. jede l-te Normalverteilung (nicht **Klasse**)
  - nicht mehr alleine durch $\vec{\mu}_l$, sondern
  - durch Parameter $\vec{\mu}_l$ und $\underline{K}_l$ einer hochdimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$ bestimmt ist,
  - $P(\vec{c} \mid R_l) = \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$
  - $P(R_l) = a_l$

Harte Vektorquantisierung

- ordne innerhalb jeder Iteration jeden Merkmalsvektor $\vec{c}_i$ einem Gebiet **hart** zu
- Ziel: durchschnittlichen Likelihood-Wert H maximieren
  bezüglich der Parameter $\vec{\theta}$
  (In um Konvergenz zu beweisen)

$$H = \frac{1}{I} \ln P(\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_I\}|\vec{\theta}) = \frac{1}{I} \ln \prod_{i=1}^{I} P(\vec{c}_i|\vec{\theta}) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \ln P(\vec{c}_i|\vec{\theta}) =$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \ln \max_{R_l} P(\vec{c}_i, R_l|\vec{\theta}) = \frac{1}{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{\vec{c}_i \in R_l} \ln(P(R_l)P(\vec{c}_i \mid R_l))$$

mit $\vec{c}_i \in R_l,$ falls $P\left(\vec{c}_i \mid R_l\right) = \max_{k=1,\ldots,L} P\left(\vec{c}_i \mid R_k\right)$

- Verfahren zur Optimierung von L Gebieten

wähle aufgrund von Vorwissen oder zufällig initiale Parameter $P(R_l), \vec{\mu}_l, \underline{K}_l$ (z.B. $P(R_l) = 1/L$, $\vec{\mu}_l = l$-ter Vektor der Stichprobe, $\underline{K}_l = \mathcal{I}$
$H^0 := -\infty$ (Wert der Likelihood-Funktion in der Iteration 0) $t := 0$ (Iterationszähler)
$t := t + 1, \quad H^{(t)} := 0$
FOR alle Gebiete $R_l, l = 1, \ldots, L$
$I_l := 0; \quad \hat{\vec{\mu}}_l := \vec{0}, \quad \underline{\hat{M}}_l := O$
FOR alle Vektoren $\vec{c}_i$ der Stichprobe
bestimme R_l mit maximaler Dichte $P(\vec{c}_i \mid R_l) = \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$
$H^{(t)} := H^{(t)} + \ln\left(P\left(R_l\right) P\left(\vec{c} \mid R_l\right)\right)$
berechne neue Schätzwerte für den Mittelwert und die Momentenmatrix, d.h. $\hat{\vec{\mu}}_l := \hat{\vec{\mu}}_l + \vec{c}_i \qquad \underline{\hat{M}}_l := \underline{\hat{M}}_l + \vec{c}_i \vec{c}_i^{\,T}$
$I_l := I_l + 1$
$H^{(t)} := H^{(t)}/I$
FOR alle Gebiete $R_l, l = 1, \ldots, L$
$P(R_l) = \frac{I_l}{I}, \quad \vec{\mu}_l := \hat{\vec{\mu}}_l / I_l; \quad \underline{K}_l := \underline{\hat{M}}_l / I_l - \vec{\mu}_l \vec{\mu}_l^{\,T}$
UNTIL $(H^{(t)} - H^{(t-1)}) / \mid H^(t) \mid \leq \varepsilon$

Weiche Vektorquantisierung, EM-Algorithmus

- ordne jeden Merkmalsvektor $\vec{c}_i$ mit dem Gewicht seiner a-posteriori-Wahrscheinlichkeit $P\left(R_l \mid \vec{c}_i\right)$ **allen** Gebieten R_l **weich** zu (beachte: $\sum_{l=1}^{L} P(R_l \mid \vec{c}_i) = 1$)
- Ziel: Maximierung (der logarithmierten) Wahrscheinlichkeit H der Produktion der Stichprobe in Abhängigkeit der Mischverteilung (normiert bzgl. der Stichprobengröße I):

$$
\begin{aligned}
H \;=\; & \frac{1}{I} \ln P(\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_I\} | \vec{\theta}) = \frac{1}{I} \ln \prod_{i=1}^{I} P(\vec{c}_i | \vec{\theta}) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \ln P(\vec{c}_i | \vec{\theta}) = \\
& \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \ln \sum_{l=1}^{L} P\left(R_l\right) P\left(\vec{c}_i \mid R_l\right)
\end{aligned}
$$

- zur Berechnung von $P(R_l \mid \vec{c}_i)$ folgende Umformungen (Bayes-Gesetzes):

$$
\begin{aligned}
P\left(R_l \mid \vec{c}_i\right) &= \frac{P(R_l)P\left(\vec{c}_i \mid R_l\right)}{P\left(\vec{c}_i\right)} \\
P\left(\vec{c}_i\right) &= \sum_{k=1}^{L} P\left(\vec{c}_i, R_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{L} P(R_k)P\left(\vec{c}_i \mid R_k\right) \\
\Rightarrow P\left(R_l \mid \vec{c}_i\right) &= \frac{P(R_l)P\left(\vec{c}_i \mid R_l\right)}{\sum\limits_{k=1}^{L} P(R_k)P\left(\vec{c}_i \mid R_k\right)}
\end{aligned}
$$

- Verfahren zur Optimierung von L Gebieten

wähle aufgrund von Vorwissen oder zufällig initiale Parameter $P(R_l), \vec{\mu}_l, \underline{K}_l$
(z.B. $P(R_l) = 1/L$, $\vec{\mu}_l = l$-ter Vektor der Stichprobe, $\underline{K}_l = \mathcal{I}$

$H^0 := -\infty$ (Wert der Likelihood-Funktion in der Iteration 0)
$t := 0$ (Iterationszähler)

- $t := t + 1, \quad H^{(t)} := 0$
- FOR alle Gebiete $R_l, l = 1, \ldots, L$
  - $I_l := 0; \quad \hat{\vec{\mu}}_l := \vec{0}, \quad \underline{\hat{M}}_l := O$
- FOR alle Vektoren $\vec{c}_i$ der Stichprobe
  - berechne $P(R_l \mid \vec{c}_i)$ aus $P(\vec{c} \mid R_l) = \mathcal{N}_{\vec{c}}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$ und $P(R_l)$ für alle Gebiete R_l
  - $H^{(t)} := H^{(t)} + \ln(\sum_{l=1}^{L} P(R_l) P(\vec{c} \mid R_l))$
  - FOR alle Gebiete $R_l, l = 1, \ldots, L$
    - berechne neue Schätzwerte für den Mittelwert und die Momentenmatrix, d.h.
      $\hat{\vec{\mu}}_l := \hat{\vec{\mu}}_l + \vec{c}_i \cdot P(R_l \mid \vec{c}_i) \qquad \underline{\hat{M}}_l := \underline{\hat{M}}_l + \vec{c}_i \vec{c}_i^T \cdot P(R_l \mid \vec{c}_i)$
    - $I_l := I_l + P(R_l \mid \vec{c}_i)$
- $H^{(t)} := H^{(t)} / I$
- FOR alle Gebiete $R_l, l = 1, \ldots, L$
  - $P(R_l) = \frac{I_l}{I}, \quad \vec{\mu}_l := \hat{\vec{\mu}}_l / I_l; \quad \underline{K}_l := \underline{\hat{M}}_l / I_l - \vec{\mu}_l \vec{\mu}_l^T$

UNTIL $(H^{(t)} - H^{(t-1)}) / \mid H^{(t)} \mid \leq \varepsilon$

Klassenabhängige Dichten

- zerlege **klassifizierte** Stichprobe in K Stichproben $S_k,\ k = 1, \ldots, K$, die jeweils nur Vektoren aus der Klasse ω_k enthalten
- wende gesondert auf jede dieser Stichproben die Vector Quantization an. Man erhält L_k Dichten mit den Parametern $\mathcal{N}\left(\vec{\mu}_l^k, \underline{K}_l^k\right)$
- bestimme aus der klassifizierten Stichprobe die Gewichte wie folgt:

$$a_l^k = \frac{1}{I^k} \sum_{\vec{c}_i \in \omega_k \wedge \vec{c}_i \in R_l^k} 1 \qquad \text{(harte VQ)}$$

$$a_l^k = \frac{1}{I^k} \sum_{\vec{c}_i \in \omega_k} P\left(R_l^k \mid \vec{c}_i\right) \qquad \text{(weiche VQ)}$$

- die Komponenten der Unterscheidungsfunktion ergeben sich nun zu:

$$P(\vec{c} \mid \omega_k) = \sum_{l=1}^{L_k} a_l^k \cdot \mathcal{N}\left(\vec{\mu}_l^k, \underline{K}_l^k\right)$$

Klassenunabhängige Dichten

- schätze auf einer **unklassifizierten** Stichprobe (weiche oder harte VQ) $\Rightarrow L$ Normalverteilungen $\mathcal{N}\left(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l\right)$
- bestimme die Gewichtsparameter der obigen Dichten für die Klasse ω_k aus einer (evtl. kleineren) **klassifizierten** Stichprobe wie folgt:

$$a_l^k = \frac{1}{I^k} \sum_{\vec{c}_i \in \omega_k \wedge \vec{c}_i \in R_l} 1 \qquad \text{(harte VQ)}$$

$$a_l^k = \frac{1}{I^k} \sum_{\vec{c}_i \in \omega_k} P\left(R_l \mid \vec{c}_i\right) \qquad \text{(weiche VQ)}$$

- $$P(\vec{c} \mid \omega_k) = \sum_{l=1}^{L} a_l^k \mathcal{N}(\vec{\mu}_l, \underline{K}_l)$$

- dieses Vorgehen ist u.U. günstiger, das sich mehrere Klassen eine Normalverteilung “teilen” können

6.6.7 Andere Verteilungen

Statistische Unabhängigkeit

- **Annahme** statistischer Unabhängigkeit der Merkmale
  (die allerdings in der Regel nicht, höchstens approximativ gegeben ist)
- N-dimensionaler Merkmalsraum $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_N)$

$$P(\vec{c} \mid \omega_k) = \prod_{n=1}^{N} P(c_n \mid \omega_k)$$

- die $P(c_n \mid \omega_k)$ können
  - mit eindimensionalen parametrischen Dichte geschätzt werden
    (größere Auswahl als im höherdimensionalen Fall)
  - nach Diskretisierung der Werte c_n:
    durch Histogramm als relative Häufigkeiten tabelliert werden

Parzenschätzung, radiale Basisfunktionen

- **Motivation:** für höhere Dimensionen ist Diskretisierung des Merkmalsraums bei relativ wenigen Stichprobenelementen schwierig
- $\Rightarrow$ "verschmiere" jeden Beitrag der Stichprobe um seine Position
- Approximation der Dichte durch Überlagerung von Normalverteilungen, (oder auch andere Fensterfunktionen, z.B. Rechteck)

$$P(\vec{c} \mid \omega_k) = \frac{1}{I_k} \sum_{i=1}^{I_k} \mathcal{N}\left(\vec{c}_i^{\,k}, K\right)$$

wobei $K = \sigma I$, und σ die Breite des Fensters (des "Verschmierens") bestimmt

6.7 Alternative Klassifikationsergebnisse

bis jetzt: genau **eine** Klasse oder Rückweisung

Erweiterung weniger endgültige Entscheidung des Klassifikators, um nachfolgenden Prozesss die Entscheidung zu überlassen (wobei dieser weitere Evidenzen eingehen lassen kann)
$\Rightarrow$ *principle of least commitment*

Idee
- ordne die Klassen ω_k gemäß abfallendem $P(\omega_k \mid \vec{c})$
- wähle **Konfidenzschwelle** $\theta \in \left[\frac{1}{K}; 1\right]$
- Ergebniss der Klassifikation sind die ersten Klassen, sodass bei minimaler Anzahl an Klassen gilt:

$$\sum_k P(\omega_k \mid \vec{c}) \geq \theta$$

Bemerkungen durch die Wahl von θ kann die Anzahl an Alternativen gewählt werden:

- $\theta = \frac{1}{K}$: nur beste Klasse, wie bisher
- $\theta = 1$: alle Klaasen