Extended Kalmanfilter

- Einführung & Motivation
- Theoretische Grundlagen
- Algorithmus

Birgit Möller & Denis Williams
AG Bioinformatik & Mustererkennung
Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Einführung

Kurzer Rückblick: Kalmanfilter

Grundidee:

Modellierung eines linearen Systems, das mit einem Zufallsprozess überlagert ist, um Vorhersagen über System-Verhalten zu machen

Herangehensweise:

Aufstellung von Modellgleichungen für das zeitliche Verhalten und über Zusammenhänge zu Messwerten (*"predictor"* und *"corrector" equations*)

Ablauf: zu jedem Zeitschritt

- Abgleich der aktuellen Zustandsschätzung mit Messergebnissen
- Korrektur der Schätzung (*a-priori* $\longrightarrow$ *a-posteriori*)
- Prädiktion des Zustands für den nächsten Zeitschritt

Problem: Modell beschränkt auf **lineare** Systeme!!!

Lösungsansatz: **Extended Kalmanfilter**

Grundidee:

lokale lineare Approximation des nicht-linearen Modells (vgl. Taylor-Reihe)

Modellierung (analog zum Standard-Kalman):

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= f(\vec{x}_{k-1}, \vec{\omega}_{k-1}) \in R^n \\ \vec{z}_k &= h(\vec{x}_k, \vec{\nu}_k) \in R^m \\ & \quad f, h \text{ nicht-lineare Funktionen} \end{aligned}$$

- der tatsächliche Zustand kann wiederum nur approximiert / geschätzt werden:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}, 0) \\ \hat{z}_k &= h(\hat{x}_k^-, 0) \end{aligned}$$

Modellierung

Lineare Approximation der Modellgleichungen:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_k &\approx f(\hat{x}_{k-1}) + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W\vec{\omega}_{k-1} \\
&\approx \hat{x}_k^- + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W\vec{\omega}_{k-1} \\
\vec{z}_k &\approx h(\hat{x}_k^-) + H \cdot (\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + V\vec{\nu}_k \\
&\approx \hat{z}_k^- + H \cdot (\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + V\vec{\nu}_k
\end{aligned}$$

mit den Jacobi-Matrizen

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{k-1}, 0) \quad , \quad W_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \omega_j}(\hat{x}_{k-1}, 0)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\hat{x}_k^-, 0) \quad , \quad V_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \nu_j}(\hat{x}_k^-, 0)$$

- die Matrizen sind abhängig vom jeweiligen Zeitschritt

Modellierung

Erinnerung:

Ziel des Korrekturschrittes war Berechnung einer a-posteriori-Schätzung, die mittleren quadratischen Schätzfehler minimiert!

- (a-priori) Schätzfehler:
$$\hat{e}_{x_k}^- = \vec{x}_k - \hat{x}_k^-$$
- (a-priori) Messfehler:
$$\hat{e}_{z_k}^- = \vec{z}_k - \hat{z}_k^-$$

Schätz- und Messfehler können nur approximiert werden.
Einsetzung der Modellgleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{x_k}^- &\approx \hat{x}_k^- + A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W\vec{\omega}_{k-1} - \hat{x}_k^- &&\approx A \cdot (\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \epsilon_k \\
\hat{e}_{z_k}^- &\approx \hat{z}_k^- + H \cdot (\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + V\vec{\nu}_k - \hat{z}_k^- &&\approx H \cdot (\hat{e}_{x_k}^-) + \eta_k
\end{aligned}$$

ϵ_k ist mittelwertfreie Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix WQW^T,
η_k ist mittelwertfreie Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix VRV^T.

Modellierung

- Approximation ergibt einen zweiten Kalmanprozess, der die Entwicklung des Schätzfehlers über die Zeit modelliert
  - minimiere diesen Schätzfehler
  - leite verbesserte Zustandsschätzung ab

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \hat{e}_{x_k}$$

- Annahmen zur Minimierung:
  - Verteilungen von $\hat{e}_{x_k}^-$, ϵ_k und η_k
  - $\hat{e}_{x_k} = K_k \cdot \hat{e}_{z_k}^-$ (analog zum Standard-Kalman)
- Rückeinsetzung ergibt:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \hat{e}_{x_k} = \hat{x}_k^- + K_k \cdot \hat{e}_{z_k}^-$$

(K_k ergibt sich analog zum Standard-Kalman, mit angepasster Kovarianz)

Algorithmus

Überblick:

a) Prädiktion:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}, 0) \\
P_k^- &= A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T
\end{aligned}
$$

b) Korrektur:

$$
\begin{aligned}
K_k &= \frac{P_k^- H_k^T}{(H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)} \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k \cdot (\vec{z}_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \\
P_k &= (I - K_k H_k) P_k^-
\end{aligned}
$$

Algorithmus

Fazit:

- Behandlung nicht-linearer Modelle durch lineare Approximation
- Ansatz in impliziter Modellierung des Schätzfehlers
  $\Rightarrow$ schätze a-posteriori Fehler aus a-priori Schätzfehler,
  kombiniert mit aktuellen Messergebnissen
- Kalmanfaktor- und Fehlermatrix-Berechnungen weitgehend analog zum Standard-Kalman
  $\Rightarrow$ Extended Kalman ist ”lediglich” nicht-lineare Erweiterung