# A Die Gammafunktion

Für $x > 0$ und $z > 0$ ist die **unvollständige Gammafunktion** $\Gamma(z, x)$ gegeben durch

$$\Gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \,, \tag{1a}$$

und die bekannte (vollständige) **Gammafunktion** $\Gamma(z)$ gegeben durch

$$\Gamma(z) = \Gamma(z, +\infty) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \,. \tag{1b}$$

Für natürliche Zahlen $k \geq 1$ lässt sich die Gammafunktion einfach berechnen durch $\Gamma(k) = (k-1)!$. Etwas allgemeiner gilt $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ für alle reellen $z > 1$.

Das (vollständige) **Eulersche Beta-Integral** $B(\alpha, \beta)$ **der Ordnung** $(\alpha, \beta)$ steht im Zusammanhang mit der Gammafunktion (siehe [Rényi, S. 81ff.]:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \,. \tag{1c}$$

# B Einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

## B.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Der Zufallsvektor $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $n_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k n_i = N$ heißt **multinomialverteilt mit Parametern** $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k$, wobei $p_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, wenn

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{n_i} \,. \tag{2a}$$

Der Spezialfall $k = 2, n_1 = n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}, n_2 = N - n, p_1 = p \in [0, 1], p_2 = 1 - p$ ergibt die **Binominalverteilung mit Parameter** $p$

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!)} p^n (1-p)^{N-n} \,. \tag{2b}$$

## B.2 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine Zufallsvariable $X \in (0, 1)$ ist **Beta-verteilt mit positiven Parametern** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, wenn ihre Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \,, \quad 0 < x < 1 \,. \tag{3a}$$

Der Erwartungswert und die Varianz einer Beta-verteilten Zufallsvariable sind

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \,. \tag{3b}$$

Die **Gleichverteilung auf** $(0, 1)$ ist ein Spezialfall der Betaverteilung für die Paramter $\alpha = \beta = 1$.
Der Zufallsvektor $R = (r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $r_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k r_i = 1$ heißt **Dirichlet-verteilt mit Parametern** $\alpha \in \mathbb{R}$ **und** $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$, wobei $\alpha, q_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k q_i = 1$, wenn seine Dichtefunktion durch

$$f_R(r_1, r_2, \ldots, r_k) \equiv D_{\alpha,Q}(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha q_i)} \prod_{i=1}^k r_i^{\alpha q_i - 1} \tag{4}$$

gegeben ist.