Übungen Algorithmen der Bioinformatik II
Wintersemester 2004/05

Stefan Posch, Birgit Möller, Denis Williams

Institut für Informatik
Universität Halle

# Blatt 9

**Aufgabe 9.1** Betrachten Sie folgendes Glücksspiel, welches in Ihrer Lieblingsspielhölle angeboten wird: Sie starten mit einem Kapital von $i, 0 < i < S$ Euro, der Spielhöllenbesitzer mit $S - i$ Euro. Nun wird eine Münze geworfen, die mit der Wahrscheinlichkeit $p$ Kopf, mit $1 - p$ Zahl liefert. In ersterem Fall erhalten Sie vom Spielhöllenbesitzer einen Euro aus dessem Stapel, andernfalls müssen Sie einen rüberwandern lassen. Das Spiel endet, sobald einer von Ihnen keinen Euro mehr hat (und konsequenterweise der andere sich im Besitz von $S$ Euro befindet).

(a) Modellieren Sie dieses Spiel durch ein geeignetes Markov Modell.

(b) Welches sind die absorbierenden Zustände?

Betrachten Sie nun den Fall: $S = 5, p = 0.2$ und nutzen Sie folgende Ergebnisse der linearen Algebra um zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sie (in Abhängigkeit vom Startvermögen) als Sieger bzw. Siegerin vom Platze gehen werden.

Sei $P$ eine $S \times S$ Matrix. Wir nehmen an, dass alle $S$ Eigenvektoren $\lambda_s$ einfach sind und $l_s$ bzw. $r_s^t$ die zugehörigen linken bzw. rechten Eigenvektoren sind ($l_s$ und $r_s$ sind jeweils Zeilenvektoren, $^t$ notiert das Transponieren):

$$Pr_s^t = \lambda_s r_s^t \text{ und } l_s P = l_s \lambda_s$$

Wir nehmen an, dass die Eigenvektor folgendermaßen normiert sind, wobei nicht schadet, daß diese Normierung nicht eindeutig ist.

$$l_s r_s^t = 1, \qquad \forall 1 \leq s \leq S$$

Dann können wir $P$ und seine Potenzen durch folgende Spektral-Zerlegung darstellen

$$P^n = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s^n r_s^t l_s$$

(c) Gibt es eine stationäre Verteilung? Wenn ja, welche ist es; falls nein, warum nicht?

**Aufgabe 9.2** Zeigen Sie:

(a) wenn $\vec{p}$ ein Zufallsvektor und $P$ eine stochastische Matrix ist, so ist auch $\vec{q} = \vec{p}P$ ein Zufallsvektor.

(b) wenn $P$ und $Q$ stochastische Matrizen sind, so sind auch $PQ$ und $QP$ stochastische Matrizen.

*Bemerkungen:*

(a) $\vec{x}$ ist ein $D$-dimensionaler Zufallsvektor, gdw. $x_d \geq 0 \ \ \forall d = 1, ..., D$ und $\sum_{d=1}^{D} x_d = 1$

(b) $X$ ist eine stochastische $D{\times}D$ Matrix, gdw. $x_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j = 1, ..., D$ und $\sum_{j=1}^{D} x_{ij} = 1 \ \ \forall i = 1, ..., D$

**Aufgabe 9.3** Zeigen Sie:

(a) wenn eine stochastische $D \times D$ Matrix $X$ nur identische Zeilen $\vec{x} = (x_{i1}, ..., x_{iD}), \ i = 1, ..., D$ besitzt, so ist die stationäre Verteilung dieser Matrix gleich $\vec{x}$.

(b) jede Anfangsverteilung $\vec{y}$ mit positiven Elementen $y_i > 0 \ \forall i = 1, ..., D$ und $\sum_{d=1}^{D} y_d = 1$ konvergiert durch einmaliges Anwenden von $X$ zur stationären Verteilung $\vec{x}$.

Abgabe: 16.12.04