Übungen Algorithmen der Bioinformatik II
Wintersemester 2005/06
Prof. Dr. Stefan Posch, Dr. Birgit Möller

Institut für Informatik
Universität Halle

Blatt 8

Aufgabe 8.1

Bei einer Multinomialverteilung ist die Anzahl N und damit die Summe der beobachteten Ereignisse bekannt. Man kann deshalb eine Komponente des Beobachtungsvektors durch die anderen ausdrücken: $\widetilde{Mu}(X_1, X_2, ..., X_{D-1}|N, \theta) = Mu(X_1, X_2, ..., X_D|N, \theta)$

Nutzen Sie diese Parametrisierung der Multinomialverteilung, um zu zeigen, daß jede Randverteilung einer Multinomialverteilung wiederum eine Multinomialverteilung ist.

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie, daß für beliebige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $P(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) > 0$ gilt:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2) \cdots P(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \,.$$

Aufgabe 8.3 Betrachten Sie folgendes Glücksspiel, welches in Ihrer Lieblingsspielhölle angeboten wird: Sie starten mit einem Kapital von $i, 0 < i < S$ Euro, der Spielhöllenbesitzer mit $S - i$ Euro. Nun wird eine Münze geworfen, die mit der Wahrscheinlichkeit p Kopf, mit $1 - p$ Zahl liefert. In ersterem Fall erhalten Sie vom Spielhöllenbesitzer einen Euro aus dessem Stapel, andernfalls müssen Sie einen rüberwandern lassen. Das Spiel endet, sobald einer von Ihnen keinen Euro mehr hat (und konsequenterweise der andere sich im Besitz von S Euro befindet).

(a) Modellieren Sie dieses Spiel durch ein geeignetes Markov Modell.

(b) Welches sind die absorbierenden Zustände?

Betrachten Sie nun den Fall: $S = 5, p = 0.2$ und nutzen Sie folgende Ergebnisse der linearen Algebra um zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sie (in Abhängigkeit vom Startvermögen) als Sieger bzw. Siegerin vom Platze gehen werden.

Sei P eine $S \times S$ Matrix. Wir nehmen an, dass alle S Eigenwerte λ_s einfach sind und l_s bzw. r_s^t die zugehörigen linken bzw. rechten Eigenvektoren sind (l_s und r_s sind jeweils Zeilenvektoren, ^{t} notiert das Transponieren):

$$Pr_s^t = \lambda_s r_s^t \text{ und } l_s P = l_s \lambda_s$$

Abgabe: 15.12.2005

Wir nehmen an, dass die Eigenvektor folgendermaßen normiert sind, wobei nicht schadet, daß diese Normierung nicht eindeutig ist.

$$l_s r_s^t = 1, \qquad \forall 1 \leq s \leq S$$

Dann können wir P und seine Potenzen durch folgende Spektral-Zerlegung darstellen

$$P^n = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s^n r_s^t l_s$$

(c) Gibt es eine stationäre Verteilung? Wenn ja, welche ist es; falls nein, warum nicht?