



## Blatt 9

### Aufgabe 9.1

- (a) Beweisen Sie  $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$ .
- (b) Leiten Sie das Maximum, den Erwartungswert und die Varianz der Betadichte her.
- (c) Als a-priori Dichte des Parameters  $p$  einer Münze nehmen wir eine Betadichte mit Parameter  $(\alpha, \beta)$  an. Nun werfen wir die Münze  $N$  mal und beobachten  $k$  mal Zahl. Bei welchem Wert  $p$  liegt das Maximum der a-posteriori Dichte von  $p$ , und wie lautet der Erwartungswert von  $p$  bzgl. der a-posteriori Dichte von  $p$ ?
- (d) Beweisen Sie  $E((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta}) + Bias^2(\hat{\theta})$ .

**Aufgabe 9.2** Auf der Internetseite zur Vorlesung finden Sie in der Datei `expr.txt` einen Datensatz mit Microarray Expressionsdaten für 50 Gene. Die Daten wurden bereits normiert und logarithmiert, und die daraus resultierenden Werte nennen wir im folgenden kurz Log-Intensitäten.

- (a) Stellen Sie das Histogramm der log Log-Intensitäten grafisch dar. Berechnen Sie die Schiefe und den Exzess des Histogramms und vergleichen Sie diese Werte mit denen, die sie für eine Gaussverteilung erwarten würden.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Daten durch Ziehen aus einer Gaussverteilung (mit unbekanntem Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ ) generiert wurden.

- (b) Stellen Sie die Log-Likelihood als Funktion von  $\mu$  und  $\sigma^2$  grafisch dar. Berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzer von  $\mu$  und  $\sigma^2$  sowie die dazugehörige Log-Likelihood. Ist der Schätzer erwartungstreu? Falls nicht, geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer von  $\mu$  und  $\sigma^2$  an und berechnen Sie diesen sowie die dazugehörige Log-Likelihood. Vergleichen Sie die vier Schätzwerte sowie die beiden Log-Likelihood Werte und diskutieren Sie die Unterschiede.
- (c) Nun wird Ihnen mitgeteilt, dass auf Grund der angewendeten Normierung  $\mu = 0$  ist. D. h. Ihre Aufgabe besteht nun nur noch darin,  $\sigma^2$  zu schätzen. Stellen Sie die Log-Likelihood als Funktion von  $\sigma^2$  grafisch dar. Berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzer von  $\sigma^2$  sowie die dazugehörige Log-Likelihood. Vergleichen

Sie den Schätzwert als auch den Log-Likelihood Wert mit den entsprechenden Ergebnissen aus Aufgabe (b) und diskutieren Sie die Unterschiede. Ist der Schätzer erwartungstreu? Falls nicht, geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer von  $\sigma^2$  an und berechnen Sie diesen sowie die dazugehörige Log-Likelihood. Vergleichen Sie die beiden Schätzwerte sowie die beiden Log-Likelihood Werte und diskutieren Sie die Unterschiede.

**Aufgabe 9.3** Auf der Internetseite zur Vorlesung finden Sie in der Datei `bioData.txt` einen Datensatz, den Ihnen Ihr Haus-Biologe zur Analyse übersandt hat.

- (a) Plotten Sie ein Histogramm der Daten.
- (b) Führen Sie zwei unterschiedliche Modellierungen durch, indem Sie zwei verschiedene (kontinuierliche) Verteilungen aus der Vorlesung für die Daten annehmen. Schätzen Sie die jeweiligen Modellparameter.
- (c) Plotten Sie die Log-Likelihood-Funktionen für geeignete Wertebereiche und diskutieren Sie die Diagramme.
- (d) Für welches Modell würden Sie sich entscheiden?