Übungen Algorithmen der Bioinformatik II
Wintersemester 2006/07
Dr. Ivo Große, Dipl.-Bioinf. Jan Grau

Institut für Informatik
Universität Halle

Blatt 10

Aufgabe 10.1

(a) Beweisen Sie $\int \prod_{d=1}^{D} p_d^{\alpha_d - 1} d\vec{p} = \frac{\prod_{d=1}^{D} \Gamma(\alpha_d)}{\Gamma(\sum_{d=1}^{D} \alpha_d)}$, wobei sich das Integral über den $D-1$-dimensionalen Simplex S (siehe Vorlesung) erstreckt.

(b) Leiten Sie das Maximum, den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix der Dirichletdichte her.

(c) Als a-priori Dichte des Parameters $\vec{p}$ eines 4-seitigen DNA-Würfels nehmen wir eine Dirichletdichte mit Parameter $\vec{\alpha}$ an. Nun werfen wir den DNA-Würfel N mal und beobachten N_A mal A, N_C mal C, N_G mal G und N_T mal T. Bei welchem Wert $\vec{p}$ liegt das Maximum der a-posteriori Dichte von $\vec{p}$, und wie lautet der Erwartungswertvektor von $\vec{p}$ bzgl. der a-posteriori Dichte von $\vec{p}$?

(d) Beweisen Sie $P(\theta|X_1, \ldots, X_T) = \frac{P(X_T|X_1,\ldots,X_{T-1},\theta)P(\theta|X_1,\ldots,X_{T-1})}{P(X_T|X_1,\ldots,X_{T-1})}$, und interpretieren Sie diesen Satz.

(e) Beweisen Sie, dass eine zur Gaussverteilung (mit unbekanntem Parameter μ und bekanntem Parameter σ^2) konjugierte Verteilung die Gaussverteilung ist. Wie transformieren sich die Hyperparameter μ_0 und σ_0^2?

(f) Beweisen Sie, dass eine zur Exponentialverteilung konjugierte Verteilung die Gammaverteilung ist. Wie transformieren sich die Hyperparameter α_0 und λ_0?

(g) Beweisen Sie, dass eine zur Poisson Verteilung konjugierte Verteilung die Gammaverteilung ist. Wie transformieren sich die Hyperparameter α_0 und λ_0?

Aufgabe 10.2 Sie gehen ohne Misstrauen in eine Spielhölle, in der mit einer Münze gespielt wird: Der Spieler oder die Spielerin setzt gegen den "Direktor" des Etablissements, indem er oder sie auf Teufel oder Engel tippt. (Bemerkung: in dieser Lokation hat die verwendete Münze diese zwei Seiten!).

Da Sie aufgrund des äußeren Rahmens doch etwas vorsichtig geworden sind, beobachten Sie zunächst den Spielverlauf und notieren einige Folgen der Ergebnisse (von Engel und Teufel). Im Rahmen dieser Übung können wir Sie natürlich nicht zum Besuch einer derartigen Einrichtung auffordern, und haben das für Sie übernommen. Das Ergebnis dieser "Exkursion" finden Sie in den Dateien "`spiel{1-5}.txt`" auf der

Homepage zur Vorlesung. Ihren unvoreingenommenen Prior modellieren Sie mittels Beta-Verteilung mit dem Erwartungswert einer fairen Münze, also z.B. $p_{\text{fair}} = 0.5$.

(a) Plotten Sie die Schätzwerte nach MAP-, MP- und ML-Prinzip gegen wachsende Länge der Beobachtung.

(b) Wiederholen Sie dies für mehrere Beobachtungsfolgen und vergleichen Sie die Resultate.

(c) Wie entwickelt sich die Varianz der a posteriori Verteilung, wiederum mit wachsender Länge der Beobachtung?

(d) Variieren Sie die Varianz Ihres Priors und vergleichen Sie (für eine oder wiederum mehrere Beobachtungsfolgen) die Entwicklung von MP-Schätzwert und Varianz der a posteriori Verteilung.

(e) Welche "Lehre" können Sie aus diesen Überlegungen für Ihren nächsten Besuch einer Spielhölle ziehen?

Aufgabe 10.3 Betrachten Sie den N-fachen Wurf einer Münze mit der Wahrscheinlichkeit p für das Ereignis "Kopf". Als a priori Verteilung für p wählen Sie wieder ein Beta-Verteilung mit den Hyperparametern α und β.

Sie haben unter obigen Annahmen nach der Beobachtungen von k Ereignissen Kopf bei N Experimenten die a posteriori Verteilung als $Be(p|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ bestimmt.

Ein Freund oder eine Freundin von Ihnen hat mit derselben Münze ebenfalls N Würfe durchgeführt. Nach der Beobachtung von $l \neq k$ Kopf-Ereignissen kommt er oder sie auf **diesselbe** a posteriori Verteilung $Be(p|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Kann dies mit rechten Dingen zugehen? Wie und unter welchen Bedingnungen kann das passieren?