



Blatt 6

Aufgabe 6.1 Sie gehen ohne Misstrauen in eine Spielhölle, in der mit einer Münze gespielt wird: Der Spieler oder die Spielerin setzt gegen den “Direktor” des Etablissements, indem er oder sie auf TEUFEL oder ENGEL tippt. (Bemerkung: in dieser Lokation hat die verwendete Münze diese zwei Seiten!).

Da Sie aufgrund des äußeren Rahmens doch etwas vorsichtig geworden sind, beobachten Sie zunächst den Spielverlauf und notieren einige Folgen der Ergebnisse (von ENGEL und TEUFEL). Im Rahmen dieser Übung können wir Sie natürlich nicht zum Besuch einer derartigen Einrichtung auffordern, und haben das für Sie übernommen. Das Ergebnis dieser “Exkursion” finden Sie in den Dateien ”spiel?.txt” auf der Homepage zur Vorlesung. Ihren unvoreingenommenen Prior modellieren Sie mittels Beta-Verteilung mit dem Erwartungswert einer fairen Münze, also z.B. $p_{\text{fair}} = 0.5$.

- (a) Betrachten Sie zunächst die Eigenschaften einer Beta-Verteilung. Es gilt:

$$Be(k|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} k^{\alpha-1} (1 - k)^{\beta-1}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, 0 < k < 1$. Weiterhin:

$$E[K] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad , \quad Var[K] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Plotten Sie die Beta-Verteilung für verschiedene Werte von α und β . Wie beeinflussen α und β jeweils die Charakteristik der Dichte?

- (b) Berechnen Sie den MAP-Schätzer für die gegebene Modellierung.
(c) Plotten Sie die Schätzwerte eines gewählten Datensatzes nach MAP-, MP- und ML-Prinzip gegen wachsende Länge der Beobachtung.
(d) Wiederholen Sie dies für mehrere Beobachtungsfolgen und vergleichen Sie die Resultate.
(e) Wie entwickelt sich die Varianz der a posteriori Verteilung, wiederum mit wachsender Länge der Beobachtung?
(f) Variieren Sie die Varianz Ihres Priors und vergleichen Sie (für eine oder wiederum mehrere Beobachtungsfolgen) die Entwicklung von MP-Schätzwert und Varianz der a posteriori Verteilung.
(g) Welche “Lehre” können Sie aus diesen Überlegungen für Ihren nächsten Besuch einer Spielhölle ziehen?