



Blatt 9

Aufgabe 9.1 Betrachten Sie folgendes Glücksspiel, welches in Ihrer Lieblingsspielhöhle angeboten wird: Sie starten mit einem Kapital von $i, 0 < i < S$ Euro, der Spielhöhlenbesitzer mit $S - i$ Euro. Nun wird eine Münze geworfen, die mit der Wahrscheinlichkeit p Kopf, mit $1 - p$ Zahl liefert. In ersterem Fall erhalten Sie vom Spielhöhlenbesitzer einen Euro aus dessen Stapel, andernfalls müssen Sie einen rüberwandern lassen. Das Spiel endet, sobald einer von Ihnen keinen Euro mehr hat (und konsequenterweise der andere sich im Besitz von S Euro befindet).

- (a) Modellieren Sie dieses Spiel durch ein geeignetes Markov Modell.
- (b) Welches sind die absorbierenden Zustände?

Betrachten Sie nun den Fall: $S = 5, p = 0.2$ und nutzen Sie folgende Ergebnisse der linearen Algebra um zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sie (in Abhängigkeit vom Startvermögen) als Sieger bzw. Siegerin vom Platze gehen werden.

Sei P eine $S \times S$ Matrix. Wir nehmen an, dass alle S Eigenwerte λ_s einfach sind und l_s bzw. r_s^t die zugehörigen linken bzw. rechten Eigenvektoren sind (l_s und r_s sind jeweils Zeilenvektoren, t notiert das Transponieren):

$$Pr_s^t = \lambda_s r_s^t \text{ und } l_s P = l_s \lambda_s$$

Wir nehmen an, dass die Eigenvektoren folgendermaßen normiert sind, wobei nicht schadet, daß diese Normierung nicht eindeutig ist.

$$l_s r_s^t = 1, \quad \forall 1 \leq s \leq S$$

Dann können wir P und seine Potenzen durch folgende Spektral-Zerlegung darstellen

$$P^n = \sum_{s=1}^S \lambda_s^n r_s^t l_s$$

- (c) Gibt es eine stationäre Verteilung? Wenn ja, welche ist es; falls nein, warum nicht?

Aufgabe 9.2 Der Datensatz "sigma70.txt" auf der Homepage zur Vorlesung besteht aus 238 Sigma-70 Bindungsstellen der Länge 12.

- a) Modellieren Sie eine Sigma-70 Bindungsstelle als $iMM(0)$ und bestimmen Sie die ML-Schätzwerte der Parameter $p_{il} := P(X_l = a_i)$. Diese p_{il} bilden eine Gewichtsmatrix (PWM), wobei die l -te Spalte die Verteilung von X_l beschreibt.
- b) Bestimmen Sie die zu dieser Gewichtsmatrix (und zu diesem Datensatz) gehörende Konsensussequenz.
- c) Wie häufig taucht die Konsensussequenz im gegebenen Datensatz auf?
- d) Welche Sequenz taucht am häufigsten im gegebenen Datensatz auf, und wie häufig?