Prof. Dr. Stefan Posch
Dipl.-Inform. Birgit Möller

Universität Halle
Institut für Informatik

Übungen Bildverarbeitung
Sommersemester 2003
Blatt 5

Aufgabe 5.1 Die kontinuierliche Funktion $f(t)$ besitze folgendes Spektrum $F(u)$:

$$F(u) = \begin{cases} 1, & \text{für } u_0 \leq |u| \leq 2u_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie groß ist nach dem Abtasttheorem die minimale Frequenz für die Abtastung von f(t)?

b) Stellen Sie das Spektrum der so abgetasteten Funktion graphisch dar.

c) Stellen Sie das Spektrum $F_2(u)$ graphisch dar, das sich bei der Abtastfrequenz $u_a = 2u_0$ ergibt.

d) Wie kann aus $F_2(u)$ das ursprüngliche Signal $f(t)$ zurückgewonnen werden?

Aufgabe 5.2 Zeigen Sie, dass die Inverse der 2-dimensionalen diskreten Fouriertransformation (DFT) gegeben ist durch

$$DFT^{-1}(F_{\mu\nu}) = f_{xy} = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{\mu=0}^{M_x-1} \sum_{\nu=0}^{M_y-1} F_{\mu\nu} \cdot e^{i2\pi(\frac{x\mu}{M_x} + \frac{y\nu}{M_y})}$$

Aufgabe 5.3 In dieser Aufgabe soll die Berechnungsvorschrift für die *Fast Fourier Transformation (FFT)* einer Funktion schrittweise aus der diskreten Fouriertransformation (DFT) am Beispiel einer 1-dimensionalen Funktion f_t mit einer Periodenlänge von $M_x = 8$ hergeleitet werden. Die eindimensionale DFT ist wiefolgt definiert:

$$F_\mu = \sum_{t=0}^{M_x-1} f_t \cdot e^{-2i\pi \frac{t\mu}{M_x}}$$

a) Die DFT stellt eine lineare Transformation der Eingabefunktion f_t dar. Überführen Sie zunächst die obige Formel in die entsprechende Matrixdarstellung $F_\mu = A \cdot f_t$. Verwenden Sie bei den Einträgen in der Matrix A die folgende Kurzschreibweise:

$$e^{\frac{-2i\pi}{M}} := m_M$$

b) Beweisen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$m_M^k = -m_M^{k-\frac{M}{2}}$$

Nutzen Sie dies, um die Koeffizienten in der Matrix zu vereinfachen und die Anzahl verschiedener Koeffizienten zu reduzieren.

c) Betrachten Sie nun die einzelnen Zeilen der Matrix als Berechnungsvorschriften für die $F(\mu)$ und fassen Sie in jeder Zeile Summanden durch wiederholte Ausklammerung gemeinsamer Koeffizienten zusammen.

   Hinweis: Fassen Sie zunächst Summanden, deren Koeffizienten identische Exponenten haben, zusammen, und nehmen Sie darauf aufbauend ggf. weitere Ausklammerungen vor. Versuchen Sie, die Summanden in jeder Zeile so zusammenzufassen, dass die resultierenden Faktoren in möglichst vielen Zeilen vorkommen und sich somit Vorteile für eine einfache Berechnung ergeben.

d) Vergleichen Sie nun die in den einzelnen Zeilen jeweils vorkommenden Summanden bzw. Teilsummen und leiten Sie daraus eine Berechnungsvorschrift für die $F(\mu)$ ab. Stellen Sie die Vorschrift in einem Flußdiagramm graphisch dar.

Aufgabe 5.4

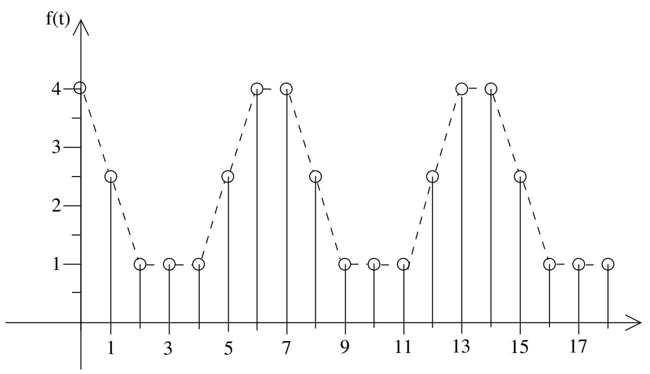
Bei der zyklischen Faltung eines Bildes mit einer Faltungsmaske treten in Randbereichen des Bildes Probleme auf, wenn die Maske nicht mehr komplett in das Bild passt. Im Allgemeinen existieren die folgenden 3 Ansätze, um das Signal über den Rand hinaus zu erweitern und so die Anwendung der Maske auch in Randbereichen des Bildes zu ermöglichen:

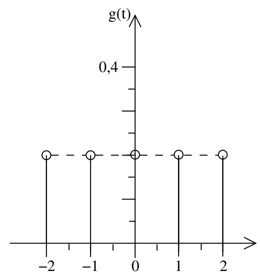
(a) zyklische Fortsetzung des Bildsignals (mit der Bildhöhe / -breite als Periode)

(b) Auffüllen des undefinierten Randbereichs mit Nullen

(c) Extrapolation mit dem Wert des letzten gültigen Pixels

Betrachten Sie das folgende diskrete, 1-dimensionale Bildsignal f_t:





Falten Sie es mit der auf der rechten Seite gezeigten Faltungsmaske g_t. Vergleichen Sie dabei die Ergebnisse, die sich jeweils aus den 3 verschiedenen Ansätzen zur Behandlung der Randproblematik ergeben. Welcher Schluß lässt sich daraus für die Anwendung von Faltungsoperationen in der Bildverarbeitung im Hinblick auf die Randproblematik ziehen?