



Blatt 11

Aufgabe 11.1 (6 Punkte) Abtastung

Die kontinuierliche Funktion $f(t)$ besitze folgendes Spektrum $F(u)$:

$$F(u) = \begin{cases} 1, & \text{für } u_0 \leq |u| \leq 2u_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zeichnen Sie das Spektrum der Funktion.
- Wie groß ist nach dem Abtasttheorem die minimale Frequenz für die Abtastung von $f(t)$, bei der das Signal später wieder verlustfrei rekonstruiert werden kann?
- Die Abtastung einer Funktion im Ortsraum durch Multiplikation mit einem Delta-Kamm entspricht im Frequenzraum einer Multiplikation des Spektrums mit der Fouriertransformierten des Delta-Kamms (Faltungssatz). Gegeben sei ein Delta-Kamm $s(x)$ im Ortsraum, definiert wie folgt:

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m \cdot \Delta x)$$

Durch Multiplikation eines Signals f mit diesem Kamm wird das Signal in x -Richtung mit einer Schrittweite von Δx abgetastet.

Die Fouriertransformierte des Kamms $S(u)$ sei gegeben durch:

$$S(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k \cdot \Delta u)$$

Stellen Sie das Spektrum $F'(u)$ der abgetasteten Funktion $f(t)$ graphisch dar, das sich durch Faltung von $F(u)$ mit $S(u)$ ergibt. Dabei soll gelten $\Delta u = 8u_0$.

- Was für ein Spektrum ergibt sich, wenn die Abtastung mit einer Frequenz von $\Delta u = 2u_0$ durchgeführt wird? Stellen Sie auch dieses Spektrum graphisch dar.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) Konturdetektion

- Schreiben Sie ein Image-Plugin, das den symmetrischen Gradienten pixelweise für ein Bild berechnet und als Ergebnis ein Bild mit den Gradientenbeträgen anzeigt.
- Schreiben Sie ein Image-Plugin, das den Sobel-Operator auf ein Bild anwendet und als Ergebnis wiederum ein Bild mit den Gradientenbeträgen anzeigt.
- Wenden Sie beide Plugins auf verschiedene Bilder an und vergleichen Sie die Ergebnisse.