3 Digitalisierung

Meßgrößen und die Umwelt sind kontinuierlich, wir brauchen aber diskrete Muster.

3.1 Abtastung

räumliche Abtastung → diskrete Stützstellen (i.d.R. äquidistant, orthogonale)

$$
\begin{aligned}
f_{jk} = \; & f(x_0 + j\Delta x, y_0 + k\Delta y) \\
& x_0, y_0 \quad \text{Anfangskoordinaten} \\
& \Delta x, \Delta y \quad \text{Abtastinterval} \\
& j = 0, \ldots, M_x - 1 \quad \text{(endliche Anzahl)} \\
& k = 0, \ldots, M_y - 1
\end{aligned}
$$

f_{jk} ein Abtastwert
$[f_{jk}]$ Folge von Abtastwerten
$\vec{f}$ diskrete Darstellung eines Musters ${}^{\rho}f$

3.2 Fouriertransformation

jede 2π periodische Funktion kann durch Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Funktionen dargestellt werden (Fourierreihe):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)) \quad \text{mit } f(t), a_\nu, b_\nu \in R$$

Darstellung als komplexe Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu t} \quad \text{mit } c_\nu \in C$$

bei unendlicher Periode (d.h. beliebige Funktion)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iut} du$$

wobei die $c(u)$ durch die Fourier-Transformation gegeben sind:

$$F(u) := c(u) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-uit}dt \quad \text{mit } F(u) \in C$$

Bemerkungen:

- aus $F(u)$ kann $f(t)$ exakt rekonstruiert werden
- $F(u)$ beschreibt für die Frequenz u die Amplitude (Betrag von $F(u)$ und die Phasenverscheibung (Winkel von $F(u)$)
- Erweiterung für beliebig-dimensionale Funktionen

3.3 Abtasttheorem

Definition eine kontinuierliche Funktion $f(x)$ heißt *bandbegrenzt* im Bereich $[-B, B]$ wenn für die FT von $f(x)$, $F(u)$ gilt:

$$F(u) = 0 \quad \text{für} \quad |u| > u_g = 2\pi B$$

Abtasttheorem : für eine bandbegrenzte Funktion ist $f(x)$ durch eine Abtastung mit Intervall Δx *vollständig* bestimmt,wenn

$$\Delta x \leq \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{u_g} <=> 2B \leq \frac{1}{\Delta x}$$

Beweis : ohne

3.4 Reale Abtastung

reale Sensoren haben endliche Größe, Bespiel CCD-Chip!

$\rightarrow$ Abtastung wird zu Integration über endliche Fäche oder Zeitintervall

3.5 Quantisierung der Abtastwerte

- Abtastwerte aus dem Intervall $[f_{min}, f_{max}]$ werden mit 2^B Stufen quantisiert
- **linearer Charakteristik**: Intervalle gleicher Größe
- **logarithmisch**

Das Ziel ist eine möglichst genaue Darstellung der Abtastwerte
$\rightarrow$ Anzahl und Form der Quantisierungsstufen ist wichtig

Damit werden wir uns nur knapp beschäftigen.

3.5.1 Anzahl der Intervalle

Bemerkungen:

- für die Wiedergabe ist die subjektive Einschätzung der Qualität wichtig
- für die Klassifikation zählt die Leistung des Systems

Üblich:

- Sprache 16 bit
- Bild 8 bit/Kanal (Achtung: üblicherweise sind $1 - 3$ bit Rauschen!)

3.5.2 Quantisierungskennlinie

Kann als Codierung/Vektorquatisierung für 1D-Fall angesehen werden

Auch die Form der Intervalle der Quantisierungsstufen ist wichtig, d.h. die (unterschiedlichen) Größen der Intervalle,

Wir wollen den mittlerern quadratischen Quantisierungsfehler minimieren:

$$\epsilon = \sum_{\nu=1}^{L} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_\nu)^2 p(f) df$$

Satz : ϵ wird minimiert wenn

$$a_\nu = \frac{b_\nu + b_{\nu-1}}{2} \qquad \nu = 2, 3, \ldots, L \tag{3.1}$$

$$b_\nu = \frac{\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} f p(f) df}{\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} p(f) df} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, L \tag{3.2}$$

wobei gelten muß $p(f = a_\nu) \neq 0, \forall \nu$

Bemerkungen:

- die optimale Quantisierungskennlinie ist von $p(f)$ abhängig (seltene Werte großer Fehler, häufige Werte kleiner Fehler)
- für gleichverteilte Abtastwerte ist die lineare Quantisierungskennlinie optimal $\rightarrow$

$$b_\nu = \frac{p(f) \int\limits_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} f df}{p(f) \int\limits_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} df} = \frac{a_{\nu+1} + a_\nu}{2}$$

- was bringt dieser Satz ? die optimalen Parameter können **iterativ** approximiert werden, falls die Dichte $p(f)$ bekannt ist
- oft werden Sprachsignale erst logarithmisch verzerrt und dann linear quantifiziert