4 Vorverarbeitung

Vorverarbeitung soll ein Muster transformieren, so daß es für die weitere

- Verarbeitung *besser geeignet* ist.
- in der Praxis (meist) heuristisch beurteilen

Ziele

- Qualität verbessern
  - Störungen, Rauschen eliminieren
- Variabilität der Muster
  - klein innerhalb derselben Klasse
  - groß zwischen Klassen

4.1 Binarisieren (von Bildern) mit Schwellwertoperationen

Binarisieren ist sinnvoll, wenn die Grauwertinformation unwichtig ist

Ziel: 1 für Objekt
0 für Hintergrund

Schwellwertoperation (wobei $f_{jk} \in \{0, \ldots, L-1\}$)

$$h_{jk} = \begin{cases} 1 & f_{jk} > \vartheta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schwellwert ϑ kann bestimmt werden

- global
- lokal

Histogramm

absolutes Histogramm: $Q_l :=$ Anzahl der (j,k) mit $f_{jk} = l$

relatives Histogramm: $q_l := \dfrac{Q_l}{\sum_k Q_k}$

4.1.1 mittlerer Grauwert

$$\theta = \sum_{l=0}^{l=L-1} q_l \cdot l$$

4.1.2 absolutes Minimum des Grauwerthistogramms

$$\theta = \operatorname*{argmin}_{l} q_l$$

4.1.3 Hauptsenke des Grauwerthistogramms

- zentralstes relatives Minimum
- absolutes Minimum in eingeschränktem Interval $[l_u, l_o]$

4.1.4 Optimaler Schwellwert

per statistische Betrachtung

Notation:

schätze Wahrscheinlichkeit für den Grauwert l mit relativem Histogramm:

$$p_l \sim q_l$$

wird geschätzt mit dem Histogramm (relative Häufigkeiten)

Der gesuchte Schwellwert zerteilt das Bild in zwei Klassen Ω_1, Ω_2:

$$\Omega_1 := \{jk | f_{jk} \leq \vartheta\} \qquad \Omega_2 := \{jk | f_{jk} > \vartheta\}$$

Klassenwahrscheinlichkeiten: $p(\Omega_1) := \sum_{l=0}^{\vartheta} q_l, \quad p(\Omega_2) := 1 - p(\Omega_1)$

Mittelwerte:

$$\mu := \sum_{l=0}^{L-1} q_l \cdot l \quad \text{(Gesamtbild)} \qquad \mu_1 := \sum_{l=0}^{\vartheta} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_1)}, \quad \mu_2 := \sum_{l=\vartheta+1}^{L-1} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_2)}$$

Optimalitäts Kriterium

$$J(\vartheta) = p(\Omega_1)(\mu_1 - \mu)^2 + p(\Omega_2)(\mu_2 - \mu)^2$$

Beachte: $p(\Omega_1)$, $p(\Omega_2)$, μ_1, μ_2 und J von ϑ abhängig !

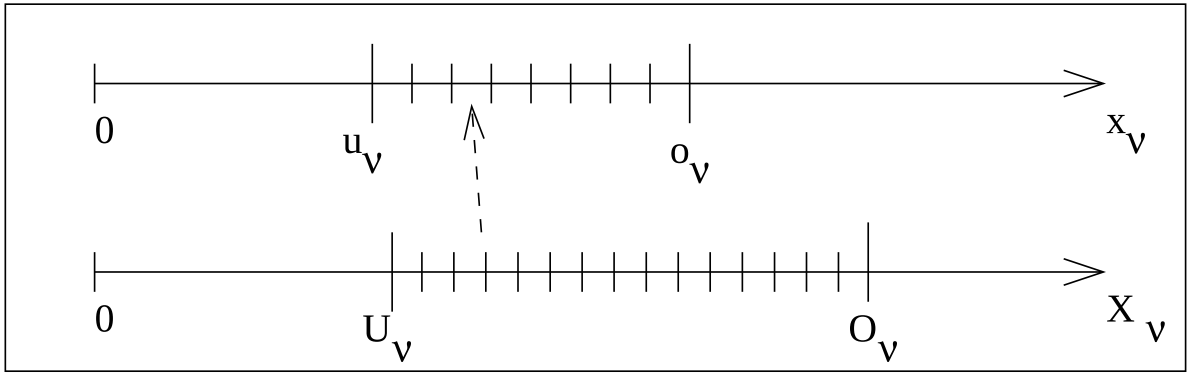
- wähle das ϑ als optimalen Schwellwert, welches $J(\vartheta)$ maximiert (teste systematisch alle möglichen ϑ)
- J versucht μ_1 und μ_2 weitweg von μ zu wählen und gleichzeitig viel in die Klassen rein zu bekommen
- μ_1, μ_2 approxmieren das Histogramm mit zwei Werten mit minimalen quadratischem Fehler

4.2 Normierung

4.2.1 Größe

Ziel: transformiere ${}^{\rho}\vec{f}(\vec{x})$, sodaß

- das Interval $[u_\nu, o_\nu]$ aller Werte $\neq 0$ der ν-te Komponente von $\vec{x}$
- im (festen) Intervall $[U_\nu, O_\nu]$ liegt



Lineare Transformation: $x_\nu = \frac{o_\nu - u_\nu}{O_\nu - U_\nu}(X_\nu - U_\nu) + u_\nu$

Abtastwerte neu bestimmen

1. lineare Interpolation
2. fasse dieses Problem als erneute Abtastung auf, rekonstruiere die ursprüngliche kontinuierliche Funktion und taste neu ab (Fouriertransformation)

4.2.2 Normierung von Mittelwert und Streuung

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_j \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (f_j - \hat{\mu})^2 \\
h_j &= \frac{f_j - \mu}{\hat{\sigma}}
\end{aligned}$$

für $\vec{h}$ gilt : Mittelwert = 0
Streuung = 1
ist approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$ (normal-)verteilt

4.2.3 Normierung der Energie

Energie in einem “Fenster” mit M Abtastwerten $j, j+1, \ldots, j+M-1$:

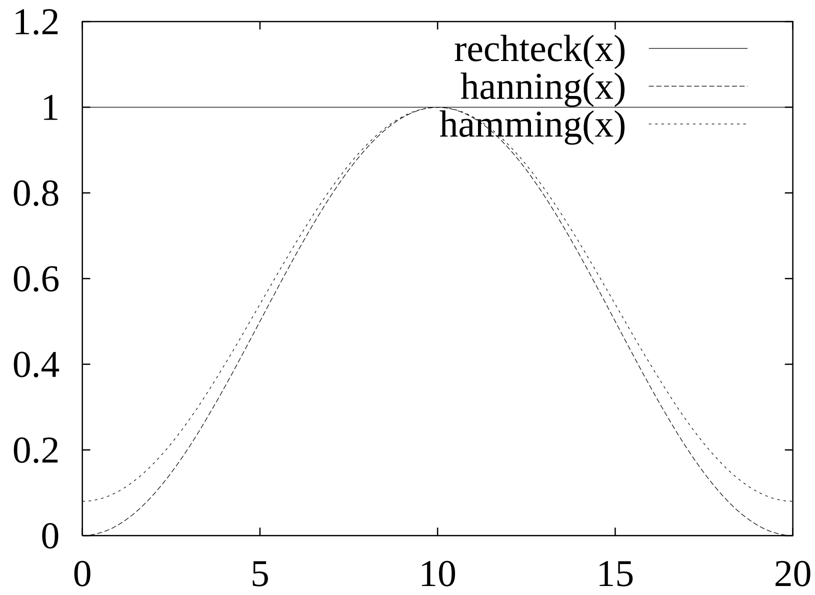
$$A_j = \sum_{\nu=0}^{M-1} |\alpha_\nu f_{j+\nu}|$$

Die α_ν bestimmen ein “Fenster”, z.B.:

Rechteckfenster	$\alpha_\nu = 1$
Hammingfenster	$\alpha_\nu = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$
Hanningfenster	$\alpha_\nu = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$

$$h_\nu = \frac{f_\nu}{A_j} \quad \nu = j, j+1, \ldots, j+(M-1)$$

damit ist die Energie der h_ν im Fenster auf 1 normiert



4.2.4 Normierung von/mit Momenten

für kontinuierliche Muster

führe *mehrere Schritte* $f(x, y) \to h(x', y')$ durch

Definition Momente:

$$
\begin{aligned}
m_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y)\, dx\, dy \\
m_{pq} &= \sum_{i+0}^{N-1} \sum_{j+0}^{M-1} i^p\ j^q\ f_{i,j}
\end{aligned}
$$

Schritt 1 Verschiebung in den Schwerpunkt und Normierung der “Masse”

$$
\begin{aligned}
x_s &= \frac{m_{10}}{m_{00}} \\
y_s &= \frac{m_{01}}{m_{00}} \\
m_{00} &: \text{ Summe derAbtastwerte, Masse} \\
m_{10} &: \text{ Massenschwerpunkt in x-Richtung} \\
m_{01} &: \text{ Massenschwerpunkt in y-Richtung} \\
(x', y') &= (x - x_s, y - y_s) \\
h(x', y') &= \frac{f(x', y')}{m_{00}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ für $h(x', y')$ gilt:

$$
\begin{aligned}
m_{00} &= 1 \\
m_{01} &= m_{10} = 0
\end{aligned}
$$

Schritt 2 Skalierung

$$
\begin{aligned}
r &:= \sqrt{m_{02} + m_{20}} \\
(x', y') &= \frac{1}{r}(x, y) \\
h(x', y') &= r^2 f(x', y')
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ für $h(x', y')$ gilt:

$$
\begin{aligned}
m_{02} + m_{20} &= 1 \\
m_{20} &: \text{ Streuung in x-Richtung} \\
m_{02} &: \text{ Streuung in y-Richtung}
\end{aligned}
$$

Schritt 3 Drehung

suche α, so daß

$$\tan(2\alpha) = 2\frac{m_{11}}{m_{20} - m_{02}}$$

wobei aus den vier Lösungen diejenige ausgesucht wird, für die das um α rotierte Muster folgende Ungleichungen erfüllt sind:

1. $m_{20} < m_{02}$
2. $m_{21} > 0$

(wobei das die Momente der bereits um α rotierten Muster sind)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ h(x', y') &= f(x', y') \\ \Rightarrow m_{11} &= 0 \end{aligned}$$

das bedeutet, daß die x und y Koordinaten maximal dekorreliert sind

Schritt 4 Spiegelung an der y-Achse, so daß $m_{12} > 0$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \begin{cases} -1 & m_{12} \leq 0 \\ 1 & m_{12} > 0 \end{cases} \\
x' &= \beta x \\
y' &= y \\
\Rightarrow m_{12} &> 0
\end{aligned}
$$

4.3 Anwendung von linearen Systemen

4.3.1 Lineare System

wir betrachten lineare Systeme (diskrete Form):

$$[f] \rightarrow \boxed{\text{T}} \rightarrow [g] = T\{[f]\}$$

Definition eine Transformation T heißt <u>linear</u>, wenn für alle Folgen $[f]$ und $[g]$ und alle Skalare a und b gilt:

$$T\{a \cdot [f] + b \cdot [g]\} = a \cdot T\{[f]\} + b \cdot T\{[g]\}$$

Definition die <u>Impulsantwort</u> $[g_\mu]$ eines linearen Systems ist definiert als

$$[g_\mu] := T\{[\delta_\mu]\}$$

wobei $[\delta_\mu]$ der Einheitsimpuls an der Stelle μ ist, d.h. eine Folge, die an der Position μ eine 1 hat, sonst nur Nullen

Definition eine lineares System T hießt verschiebungsinvariant, falls für alle j und μ gilt:

$$g_\mu[j] = g_0[j-\mu]$$

(d.h. $[g_\mu]$ entsteht aus $[g_0]$ durch Verschiebung um μ Positionen)

$[g_0]$ heißt dann Impulsantwort $[g]$ von T

Definition die Faltung $[h] = [f] * [g]$ zweier Folgen $[f]$ und $[g]$ ist gegeben als:

$$h[j] = \sum_{k=\infty}^{k=-\infty} f[k] \cdot g[j-k]$$

Satz für jedes verschiebungsinvarinante lineare System T mit der Impulsanwort $[g]$

$$T\left\{[f]\right\} = [f] * [g]$$

Satz jedes verschiebungsinvarinante lineare System T ist durch seine Impulsanwort $[g]$ eindeutig bestimmt

4.3.2 Diskrete Fouriertransformation

Definition die diskrete Fouriertransformation (DFT)
einer endlichen 2-dimensionale, diskrete Funktion $f_{jk} = f(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta y)$
für $0 \leq j < M_x$, $0 \leq k < M_y$ ist definiert als:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{M_x-1} \sum_{k=0}^{M_y-1} f_{jk} e^{-2i\pi\left(\frac{j\mu}{M_x}+\frac{k\nu}{M_y}\right)}$$

Die Inverse ist gegeben mit:

$$f_{jk} = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{\nu=0}^{M_x-1} \sum_{\mu=0}^{M_y-1} F_{\mu\nu} e^{2i\pi\left(\frac{j\mu}{M_x}+\frac{k\nu}{M_y}\right)}$$

Interpretation für periodisch fortgesetze Folge wie Fouriertransformation

Definition die zyklische Faltung h_{jk} zweier endlicher, 2-dimensionaler, diskreter Funktionen f_{jk} und g_{jk} ist definiert als ($h = f * g$):

$$h_{jk} = \sum_{l=0}^{M_x-1} \sum_{m=0}^{M_y-1} f_{l,m} \cdot g_{j-l \text{ mod } M_x \,,\, k-m \text{ mod } M_y}$$

Faltungssatz für endliche Folgen f, g, h mit $h = f * g$ und deren DFTs F, G, H gilt:

$$H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cdot G_{\mu\nu}$$

- Störungen reduzieren $\vec{f} = \vec{s} + \vec{n}$
  (Signal $\vec{s}$, Störung $\vec{n}$)
- wichtige Anteile hervorheben

über Betrachtung der Frequenzeigenschaften

4.3.3 Idealer Tiefpaßfilter

kontinuierlich:

- mit realen Bauteilen nicht realisierbar

diskret:

- ringing
- negative gefilterte Abtastwerte möglich

Alternative (als Tiefpaß): Gaußglocke

- kein idealer Frequenzgang
- kein ringing

Mittelung (als Tiefpaß)

$$h_{jk} = \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=-m}^{m} \sum_{\nu=-n}^{n} f_{j+\mu\,,\,k+\nu}$$

Frequenzgang (1D): schlecht!

Mittelung über mehrere Perioden, wenn mehrere Realisierungen des Musters vorliegen

$$h_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{\rho=1}^{N} {}^{\rho}f_{jk}$$

gut z.B. für EEG, Motorgeräusche

Numerische Differentiation

1. Ableitung in X-Richtung:

$${}^{x}f_{jk} = f_{jk} - f_{j+1,k}$$

1. Ableitung in Y-Richtung:

$${}^{y}f_{jk} = f_{jk} - f_{j,k+1}$$

Problem:

- nicht symmetrisch um j, k

Betrag des Gradienten:

$$h_{jk} = \sqrt{{}^x f_{jk}^2 +^y f_{jk}^2}$$

oder

$$h_{jk} = |{}^x f_{jk}| + |{}^y f_{jk}|$$

Diskreter Laplace Operator

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

diskret:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0