

Prof. Dr. Stefan Posch

Dr. Birgit Möller

(birgit.moeller@informatik.uni-halle.de)



Institut für Informatik  
Universität Halle

## Blatt 11

**Aufgabe 11.1** (4 Punkte) Gegeben sei ein einlagiges (lineares) Perzeptron mit drei Neuronen in der Ausgangsschicht und zweidimensionaler Eingabe, d.h. also drei rechnenden Neuronen.

Wie teilt ein solches Perzeptron den  $R^2$  in Regionen bestimmter Klassenzugehörigkeit ein?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welchen Einfluß die Wahl der Aktivierungsfunktion  $\sigma$  hat.

**Aufgabe 11.2** (7 Punkte) Ein häufig betrachtetes Problem bei der Behandlung von neuronalen Netzen ist das XOR-Problem. Es ist wie folgt definiert:

Gegeben sei eine diskrete Menge von 2D-Eingabevektoren  $V$  mit den Elementen  $\{[0, 0]; [0, 1]; [1, 0]; [1, 1]\}$ . Diese Vektoren sollen gemäß der XOR-Funktion klassifiziert werden, d.h.  $[0, 0]$  und  $[1, 1]$  sollen in die eine Klasse eingeordnet werden, und  $[1, 0]$  und  $[0, 1]$  in die andere.

Das XOR-Problem ist nicht linear-separabel, d.h. zur Lösung des Problems mit einem Multi-Layer-Perzeptron ist mindestens eine innere Schicht notwendig.

- (a) Veranschaulichen Sie sich das XOR-Problem graphisch und überlegen Sie, wie die Eingabevektoren transformiert werden können, damit sie linear-separabel werden.

Hinweis: Versuchen Sie eine Transformation zu finden, die die Daten in den  $\mathbf{R}^3$  überführt.

- (b) Entwerfen Sie ein Multi-Layer-Perzeptron zur Lösung des XOR-Problems. Mit Hilfe der inneren Schicht soll dabei die notwendige Datentransformation durchgeführt werden. Geben Sie die Architektur und die Gewichte Ihres Multi-Layer-Perzeptrons an.

Wir verallgemeinern nun das XOR-Problem. Betrachten Sie dazu das in der folgenden Abbildung dargestellte Klassifikationsproblem für einen beliebigen, kontinuierlichen 2D-Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ . Die Mittelpunkte der Kreise seien fest, der Radius  $r$  variabel. Die klassenbedingten Dichten seien innerhalb der Kreisflächen gleichverteilt. Die zwei Klassen habe dieselbe a-priori Wahrscheinlichkeit (von je 0.5).

- (c) Vergleichen Sie diese Klassifikationsaufgabe mit dem "XOR"-Problem. Wo bestehen Analogien? Überlegen Sie, wie sich der Klassifikationsfehler in Abhängigkeit von  $r$  verhält (Skizzen können bei der Veranschaulichung helfen!). Wie müsste ein Klassifikator mit minimaler Fehlerrate aussehen?

- (d) Entwerfen Sie ein Multi-Layer-Perzeptron, das die Daten mit möglichst geringem Fehler klassifiziert. Verwenden Sie dazu die Schwellwertfunktion als Aktivierungsfunktion für alle Knoten. Wie viele Knoten brauchen Sie, und welche Gewichte müssen jeweils eingestellt werden?

Hinweis: Gehen Sie von einem MLP mit zwei inneren (rechnenden) Schichten aus.

