5 Merkmalsextraktion

Wichtig : anhand der Merkmale eines Musters wird klassifiziert

- Merkmale müssen die *charakteristische* Information von Mustern enthalten (NICHT: gute Approximation oder Rekonstruktion)
- die Klassifikation soll “einfacher” sein
  - weniger Daten
  - kompakt im Merkmalsraum
- heuristische Merkmalsgewinnung
- analytische Merkmalsgewinnung
- nicht in der Vorlesung: Bewertung und Auswahl
- in der VL numerische Merkmale: $\vec{f} \rightarrow \vec{c} \in \mathcal{R}^n$

5.1 Heuristische Merkmale

5.1.1 Kennzahlen

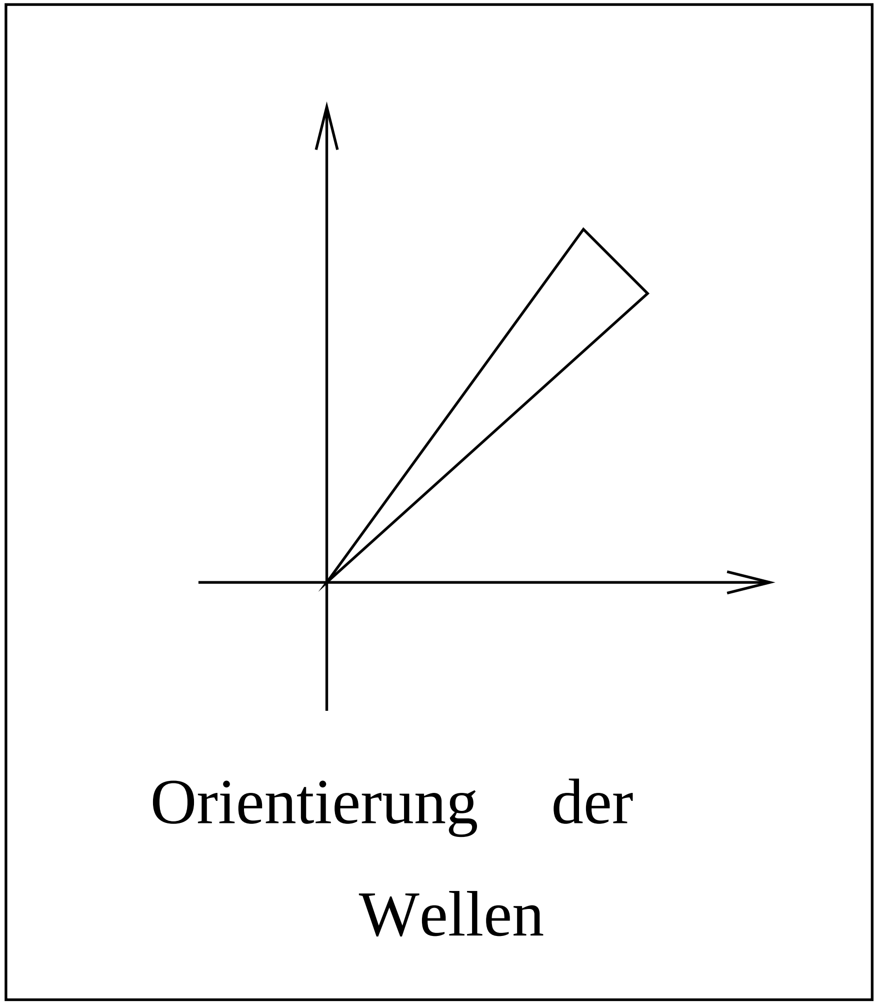
s. Abschnitt 2.1

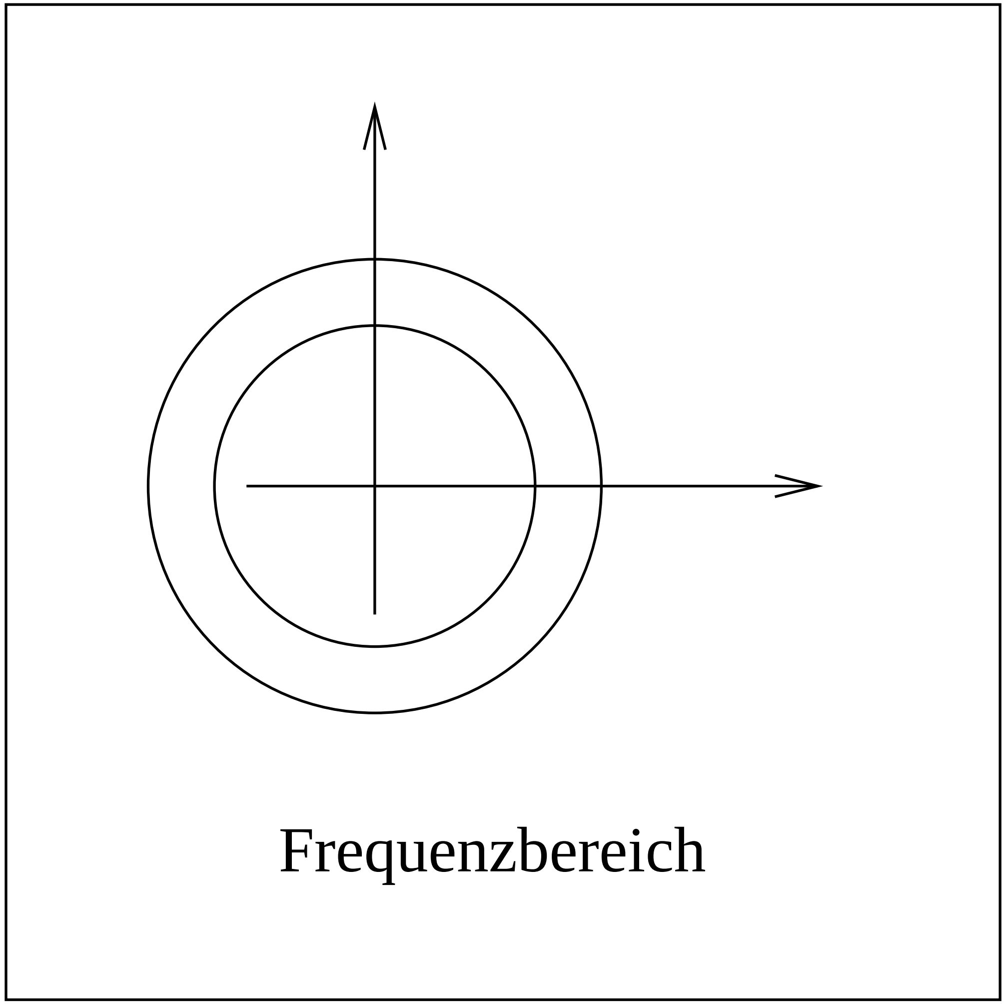
5.1.2 DFT

- DFT ist translationsinvariant wenn nur die Beträge des Spektrums betrachtet werden
- Skalierung- oder Rotationsinvarianz durch geeignete vorherige Transformation

  z.B. Normierung mit Momenten (nur “Teil” davon)
- Reduktion der Anzahl von Merkmalen:
  Summiere die Koeffizienten der DFT auf gewissen Gebieten im Frequenzraum.
  Dabei enstehen eventuell Invarianzen

  Beispiele: Orientierung der Schwingungen, Frequenzbereich


Orientierung der
Wellen

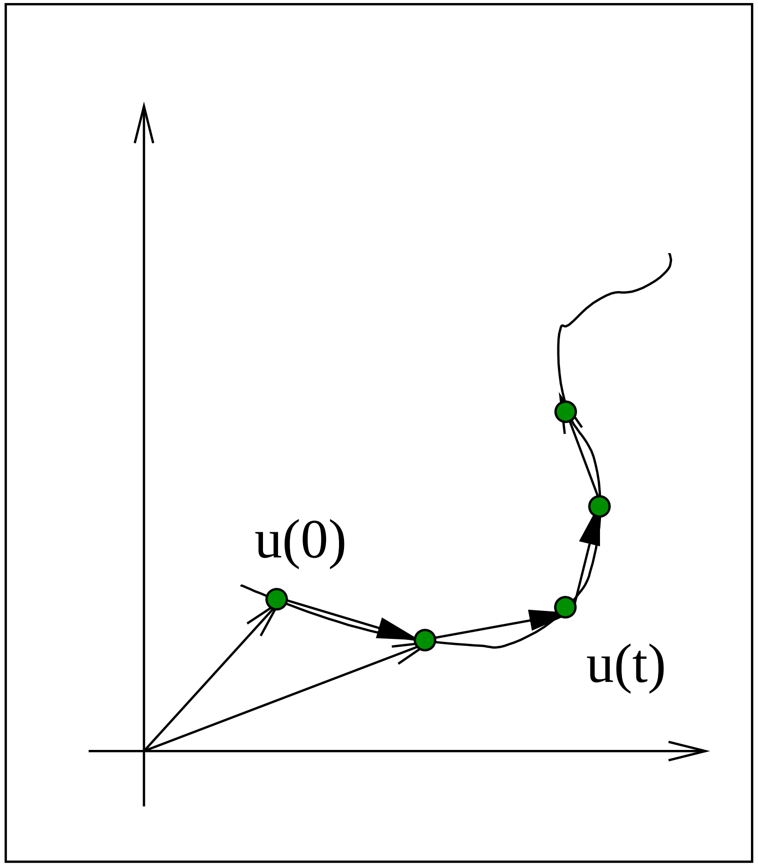

Frequenzbereich

5.1.3 Behandlung von Konturen

betrachte Kontur parametrisch als 1D-Funktion in der komplexen Ebene, abgetastet entlang der Kontur mit Δt.
$\Rightarrow$ eine Folge von komplexen Abtastwerten, und wir können DFT zur Merkmalsextraktion verwenden. Diese sind aber abhängig von

- Anfangspunkt $u(0)$
- Translation
- Rotation
- Skalierung

(Es gibt Normierungen)



5.1.4 Lineare Vorhersage

Idee: schätze aus letzten m Abtastwerten den nächsten Abtastwert als Linearkombination:

$$\widehat{f}_n = -\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu f_{n-\mu}$$

- damit kann der menschliche Vokaltrakt modeliert werden
- auch Anwendung z.B. für Textur

die a_μ werden so bestimmt, daß in einem Fenster von n_0 bis n_1 ein minimaler quadratischer Fehler entsteht, wir nehmen also an, daß das System in diesem Fenster annähernd stabil ist.

$$\epsilon = \sum_{n=n_0}^{n_1} (f_n - \widehat{f}_n)^2$$

minimal wird.D.h.:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \epsilon}{\partial a_\nu} \\
&= 2 \left(\sum_{n=n_0}^{n_1} \left(f_n + \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu f_{n-\mu} \right) f_{n-\nu} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \sum_{n=n_0}^{n} f_{n-\mu} f_{n-\nu} = - \sum_{n=n_0}^{n_1} f_n f_{n-\nu}
$$

Hinweis: Autokorrelationsmethode zum effizienten Bestimmen der a_ν

Für (oft überlappende) Fenster die a_μ bestimmen, daraus als Merkmale:

- die a_μ direkt, oder
- logarithmisches Modellspektrum als gegelättete Form des logaritmischen Spektrums des Musters $(\log |F_\nu|^2)$

$$\vec{a} = (1, a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0)$$

wird Fourier-transformiert, dann logarithmieren,
ergibt geglättetes Spektrum (eben das Modellspektrum)

Sprache typische Werte: $m = 10 \cdots 12$, $n_1 - n_0 \sim 300$

Die Länge M von $\vec{a}$ wird so gewählt, daß:

$$M > \frac{f_s}{f_r} = \frac{\text{Abtastfrequenz}}{\text{gewünschte Auflösung des Modellspektrums}}$$

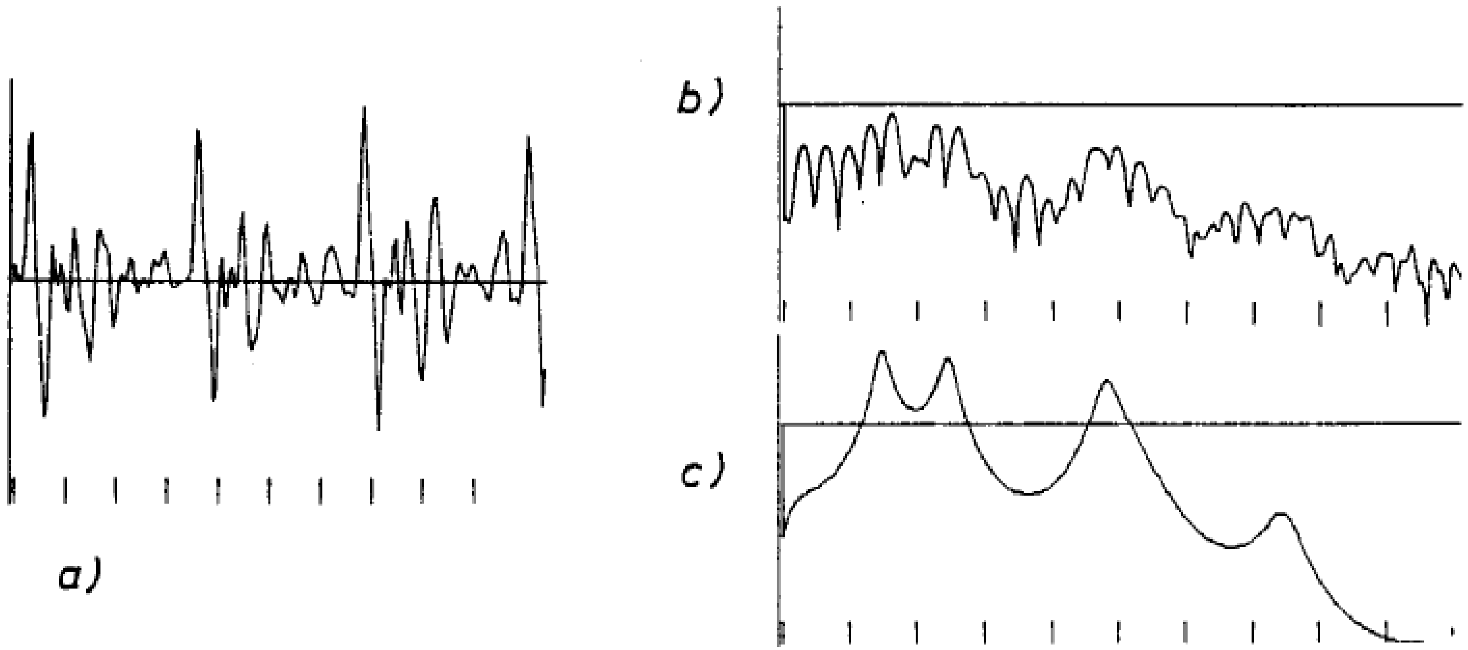


Bild 3.6.2: a) Eine Zeitfunktion; es handelt sich um einen Ausschnitt von 20 ms Dauer aus dem Vokal „a“ in dem Wort „Fass“. b) Das mit der DFT berechnete Spektrum, Abtastfrequenz 10kHz. c) Das aus den Koeffizienten der linearen Vorhersage mit $m = 13$ gewonnene Modellspektrum. Bei den Spektren ist jeweils der Betrag in logarithmischem Maßstab für den Bereich 0–5kHz dargestellt

aus [1]

5.1.5 Momente

Zentralmomente (mittelwertfrei)

- diskrete Version, Muster der Größe $M \times M$

$$\mu_{pq} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} (x_k - x_s)^p \, (y_i - y_s)^q \, \Delta x \Delta y f_{ki}$$

$\Delta x, \Delta y$	Abtastintervalle
(x_s, y_s)	Schwerpunkt

$\Rightarrow$ translationsinvarianz

Rotationsinvarianz

aus den Zentralmomenten, z.B.

$$c_1 = \mu_{20} + \mu_{02}$$

$$c_2 = (\mu_{20} + \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2$$

5.2 Analytische Merkmalsextraktion

- gewinne Merkmale c_ν *systematisch*, so daß (im gewissen Sinn) optimal
  Optimalität von “Problem”, d.h. den gegebenen Daten, abhängig
- wir betrachten lineare und orthonormale Transformationen:
  $\vec{c} = \Phi \vec{f}$, wobei i.d.R. $\dim \vec{c} < \dim \vec{f}$
  Zeilen von Φ orthonormal

Problem:

- bestimme Optimalitätskriterium
- bestimme optimale $\vec{\Phi}$

Zwei Typen von Kriterien:

1. Leistung des Klassifikators (z.B. Fehlerwahrscheinlichkeit) optimieren
   (gut, aber sehr aufwendig)
2. Postulat 3 (keine Rücksicht auf den Klassifikator, der spielt aufgrund des modularen Aufbaus keine Rolle)

Wir suchen n orthonormale Vektoren $\vec{\varphi}_\nu$ die eines der folgenden Kriterien erfüllen.

Wir gehen von einer Stichprobe aus

$$\omega = \left\{ {}^1\vec{f}, \ldots, {}^N\vec{f} \right\}$$

die Klassifiziert ist:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \omega_k \\ \omega_\kappa &= \left\{ {}^1\vec{f}_\kappa, \ldots, {}^{N_\kappa}\vec{f}_\kappa \right\} \end{aligned}$$

Merkmale: ${}^i\vec{c}_\kappa$ ist der Merkmalsvektor zu ${}^i\vec{f}_\kappa$

Vier Kriterien (basierend auf euklidischem Abstand)

1. mittlerer quadratischer Abstand aller Merkmale untereinander

$$S_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left({}^i\vec{c} - {}^j\vec{c} \right)^T \left({}^i\vec{c} - {}^j\vec{c} \right)$$

2. Interklassen-Abstand

$$S_2 = \frac{2}{K \cdot (K-1)} \sum_{\kappa=2}^{K} \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} \frac{1}{N_\kappa N_\lambda} \sum_{i=1}^{N_\kappa} \sum_{j=1}^{N_\lambda} \left({}^i\vec{c}_\kappa - {}^j\vec{c}_\lambda \right)^T \left({}^i\vec{c}_\kappa - {}^j\vec{c}_\lambda \right)$$

Mittel über den mittleren quadratischen Abstand der Merkmale aus verschiedenen Klassen

3. Intraklassen-Abstand

$$S_3 = \frac{1}{K} \sum_{\kappa=1}^{K} \frac{1}{N_\kappa^2} \sum_{i=1}^{N_\kappa} \sum_{j=1}^{N_\kappa} \left({}^i\vec{c}_\kappa - {}^j\vec{c}_\kappa \right)^T \left({}^i\vec{c}_\kappa - {}^j\vec{c}_\kappa \right)$$

Mittlerer quadratischer Abstand von Merkmalen innerhalb einer Klasse

4. Kombination aus S_2, S_3 (S_2 groß, S_3 klein)

$$S_4 = S_2 - \lambda S_3$$

eine Möglichkeit:

- lege λ fest
- betrachte λ als Lagrange-Multiplikator

Suche $\vec{\Phi}$. so daß

- S_1, S_2 oder S_4 maximal werden oder
- S_3 minimal wird

Satz die $\vec{\Phi}^{(l)}$, die S_l optimieren, erhalten wir aus Eigenvektoren mit größten (bzw. kleinsten) Eigenwerten zu geeigneten *symmetrischen Kernmatrixen* $\vec{Q}^{(l)}$

$$\vec{Q}^{(1)} = \vec{R} - \vec{m}\vec{m}^T \quad \text{(Kovarianzmatrix)}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} {}^j\vec{f}\,{}^j\vec{f}^T \quad \text{(Korrelationsmatrix)}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} {}^j\vec{f} \quad \text{(Mittelwert)}$$

$$\vec{Q}^{(2)} = \frac{2}{k}\sum_{\kappa=1}^{k} \vec{R}_\kappa - \frac{2}{k(k-1)}\sum_{\kappa=2}^{k}\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1}\left(\vec{m}_\kappa\vec{m}_\lambda^T + \vec{m}_\lambda\vec{m}_\kappa^T\right)$$

$$\vec{R}_\kappa = \frac{1}{N_\kappa}\sum_{j=1}^{N_\kappa} {}^j\vec{f}_\kappa\,{}^j\vec{f}_\kappa^T$$

$$\vec{m}_\kappa = \frac{1}{N_\kappa}\sum_{j=1}^{N_\kappa} {}^j\vec{f}_\kappa$$

$$\vec{Q}^{(3)} = \frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{k}\left(\vec{R}_\kappa - \vec{m}_\kappa\vec{m}_\kappa^T\right)$$

$$\vec{Q}^{(4)} = \vec{Q}^{(2)} - \lambda\vec{Q}^{(3)}$$

Einschub

1. für beliebige quadratische Martix $\vec{B}$ gilt

   (a) $\vec{x}^T \vec{B} \vec{y} =$ SP $\left(\vec{B} \vec{y} \vec{x}^T \right)$, mit SP $\left(\vec{B} \right) =$ Summe über die Diagonale

   (b) $\vec{x}^T \vec{B} \vec{y} =$ SP $\left(\vec{y} \vec{x}^T \vec{B}^T \right)$

   (c) für $M \times n$ Matrix $\vec{A}^T$, $\vec{A}^T = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$, gilt $\vec{A}^T \vec{A} = \sum_{\nu=1}^n \vec{a}_\nu^T \vec{a}_\nu$

   (d) $\sum_{\nu=1}^n \vec{a}_\nu^T \vec{B} \vec{a}_\nu =$ SP $\left(\vec{A}^T \vec{A} \vec{B}^T \right)$

2.(a) sei $\vec{A}$ eine reelle, symmetrische, positiv definite Matrix,
(d.h. $\forall \vec{x} \neq 0 : \vec{x}^T \vec{A} \vec{x} > 0$)
dann gilt:

- $\vec{A}$ hat reelle Eigenwerte > 0
- die Eigenvektoren sind orthogonal,
  bzw. können bei mehrfachen Eigenwerten orthogonalisiert werden
- $\vec{x}^T \vec{A} \vec{x}$ wird maximal für $\vec{x} =$ Eigenvektor zum größten Eigenwert von $\vec{A}$
  am zweit größten, für den Eigenvektor zum nächst kleineren Eigenwert, ...
- entsprechend bekommen wir die kleinsten Werte für die kleinsten Eigenwerte
- die Kernmatrizen sind reelle, symmetrische, positiv semi-definite Matrizen (positiv semi-definit aber nicht positiv definit, wenn die Mustervektoren nicht den gesamten Raum aufspannen)

damit **Beweis für** S_2

Zusammenfassung des Vorgehens

1. bestimme $Q^{(l)}$
2. bestimme die Eigenvektoren zu $Q^{(l)}$
   (Wenn $Q^{(l)}$ vollen Rang hat, ist sie positiv definit und besitzt M orthogonale Eigenvektoren)
3. wähle die n-Eigenvektoren zu den
   - größten (S_1, S_2, S_4)
   - kleinsten (S_3)

   Eigenwerten. Diese bilden die Matrix $\vec{\Phi}$

Bemerkungen:

1. diese Entwicklung heißt problemabhängig, da sie von der Stichprobe abhängt
   - die gewonnenen Merkmale enthalten in der Regel für die Klassifikation bessere Information als heuristische
2. die Transformation, die S_1 maximiert heißt *Hauptachsentransformation* oder *Karhunen-Loeve-Transformation* oder principal component analysis (PCA)

Eigenschaften der Hauptachsen Transformation:

- der mittlere quadratische Approximationsfehler wird minimal

  (bei fester Anzahl dim $\vec{c}$ Koeffizienten,
  wir können die Transformation in dim $\vec{c}$ dimensionale Unterraum auffassen!)
- die $\vec{\varphi}_\nu$ geben die Hauptachsen der Stichprobe, d.h. die Achsen ”größter Ausdehnung“
- die c_ν sind maximal dekorreliert