

4 Vorverarbeitung

Vorverarbeitung soll ein Muster transformieren, so daß es für die weitere

- Verarbeitung *besser geeignet* ist.
- in der Praxis (meist) heuristisch beurteilen

Ziele

- Qualität verbessern
 - Störungen, Rauschen eliminieren
- Variabilität der Muster
 - klein innerhalb derselben Klasse
 - groß zwischen Klassen

4.1 Binarisieren (von Bildern) mit Schwellwertoperationen

Binarisieren ist sinnvoll, wenn die Grauwertinformation unwichtig ist

Ziel: 1 für Objekt

0 für Hintergrund

Schwellwertoperation (wobei $f_{jk} \in \{0, \dots, L - 1\}$)

$$h_{jk} = \begin{cases} 1 & f_{jk} > \vartheta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schwellwert ϑ kann bestimmt werden

- global
- lokal

Histogramm

absolutes Histogramm: $Q_l :=$ Anzahl der (j,k) mit $f_{jk} = l$

relatives Histogramm: $q_l := \frac{Q_l}{\sum_k Q_k}$

4.1.1 mittlerer Grauwert

$$\theta = \sum_{l=0}^{l=L-1} q_l \cdot l = \frac{1}{N} \sum_{j,k} f_{j,k}$$

4.1.2 absolutes Minimum des Grauerthistogramms

$$\theta = \operatorname{argmin}_l q_l$$

4.1.3 Hauptsenke des Grauerthistogramms

- zentralstes relatives Minimum
- absolutes Minimum in eingeschränktem Intervall $[l_u, l_o]$

4.1.4 Optimaler Schwellwert

per statistische Betrachtung

Notation:

schätze Wahrscheinlichkeit für den Grauwert l mit relativem Histogramm:

$$p_l \sim q_l$$

wird geschätzt mit dem Histogramm (relative Häufigkeiten)

Der gesuchte Schwellwert zerteilt das Bild in zwei Klassen Ω_1, Ω_2 :

$$\Omega_1 := \{(j, k) | f_{jk} \leq \vartheta\} \quad \Omega_2 := \{(j, k) | f_{jk} > \vartheta\}$$

Klassenwahrscheinlichkeiten: $p(\Omega_1) := \sum_{l=0}^{\vartheta} q_l, \quad p(\Omega_2) := 1 - p(\Omega_1)$

Mittelwerte:

$$\mu := \sum_{l=0}^{L-1} q_l \cdot l \quad (\text{Gesamtbild}) \quad \mu_1 := \sum_{l=0}^{\vartheta} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_1)}, \quad \mu_2 := \sum_{l=\vartheta+1}^{L-1} l \cdot \frac{q_l}{p(\Omega_2)}$$

Optimalitäts Kriterium

$$J(\vartheta) = p(\Omega_1)(\mu_1 - \mu)^2 + p(\Omega_2)(\mu_2 - \mu)^2$$

Beachte: $p(\Omega_1)$, $p(\Omega_2)$, μ_1 , μ_2 und J von ϑ abhängig !

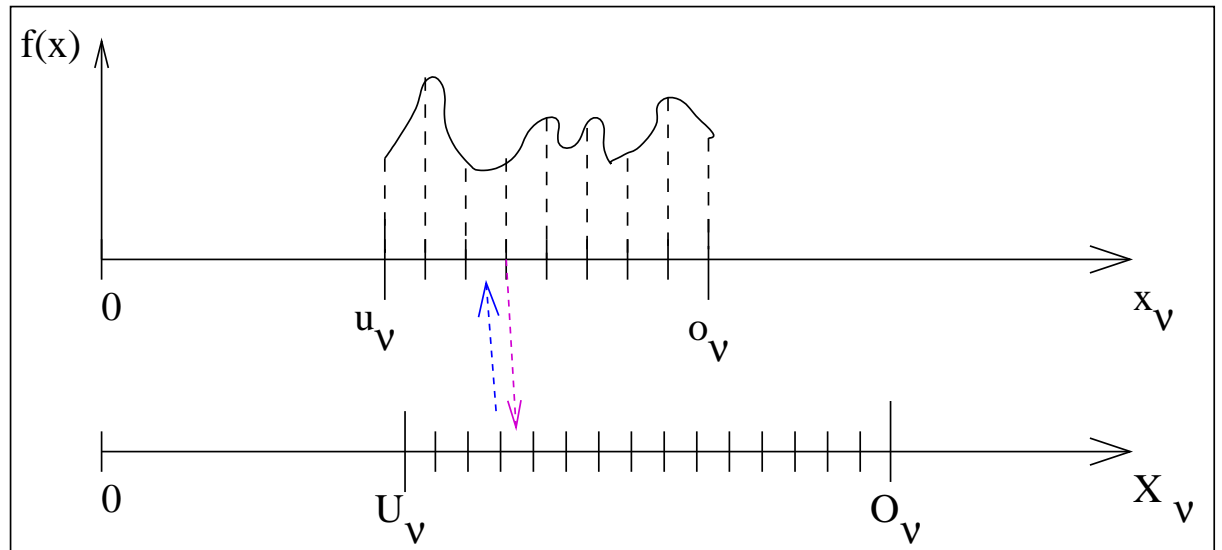
- wähle das ϑ als optimalen Schwellwert, welches $J(\vartheta)$ maximiert (teste systematisch alle möglichen ϑ)
- J versucht μ_1 und μ_2 weitweg von μ zu wählen und gleichzeitig viel in die Klassen rein zu bekommen
- μ_1 , μ_2 approximieren das Histogramm mit zwei Werten mit minimalen quadratischem Fehler

4.2 Normierung

4.2.1 Größe

Ziel: transformiere $\rho \vec{f}(\vec{x})$, sodaß

- das Intervall $[u_\nu, o_\nu]$ aller Werte $\neq 0$ der ν -te Komponente von \vec{x}
- im (festen) Intervall $[U_\nu, O_\nu]$ liegt



Lineare Transformation: $x_\nu = \frac{o_\nu - u_\nu}{O_\nu - U_\nu} (X_\nu - U_\nu) + u_\nu$

Abtastwerte neu bestimmen

1. lineare Interpolation
2. fasse dieses Problem als erneute Abtastung auf, rekonstruiere die ursprüngliche kontinuierliche Funktion und taste neu ab (Fouriertransformation)

4.2.2 Normierung von Mittelwert und Streuung

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_j$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (f_j - \hat{\mu})^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (f_j - \hat{\mu})^2$$

$$h_j = \frac{f_j - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

für \vec{h} gilt : Mittelwert = 0

Streuung = 1

ist approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$ (normal-)verteilt

4.2.3 Normierung der Energie

Energie in einem “Fenster” mit M Abtastwerten $j, j + 1, \dots, j + M - 1$:

$$A_j = \sum_{\nu=0}^{M-1} |\alpha_\nu f_{j+\nu}|$$

Die α_ν bestimmen ein “Fenster”, z.B.:

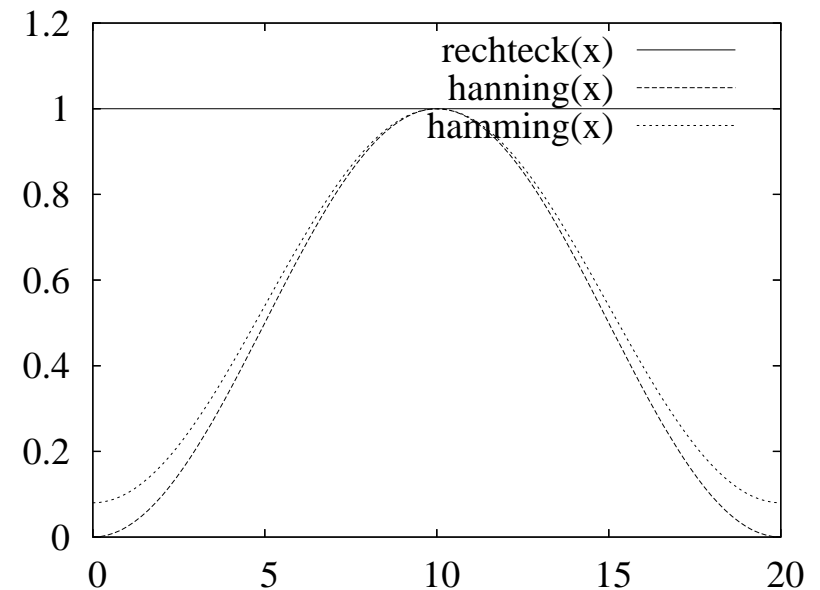
Rechteckfenster $\alpha_\nu = 1$

Hammingfenster $\alpha_\nu = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$

Hanningfenster $\alpha_\nu = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{M-1}\right)$

$$h_\nu = \frac{f_\nu}{A_j} \quad \nu = j, j + 1, \dots, j + (M - 1)$$

damit ist die Energie der h_ν im Fenster auf 1 normiert



4.2.4 Normierung von/mit Momenten

für kontinuierliche Muster

führe *mehrere Schritte* $f(x, y) \rightarrow h(x', y')$ durch

Definition Momente:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy$$
$$m_{pq} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} i^p j^q f_{i,j}$$

4.2 Normierung

Schritt 1 Verschiebung in den Schwerpunkt und Normierung der “Masse”

$$x_s = \frac{m_{10}}{m_{00}}$$

$$y_s = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

m_{00} : Summe der Abtastwerte, Masse

m_{10} : Massenschwerpunkt in x-Richtung

m_{01} : Massenschwerpunkt in y-Richtung

$$(x', y') = (x - x_s, y - y_s)$$

$$h(x', y') = \frac{f(x', y')}{m_{00}}$$

⇒ für $h(x', y')$ gilt:

$$m_{00} = 1$$

$$m_{01} = m_{10} = 0$$

Schritt 2 Skalierung

$$r := \sqrt{m_{02} + m_{20}}$$
$$(x', y') = \frac{1}{r}(x, y)$$
$$h(x', y') = r^2 f(x', y')$$

⇒ für $h(x', y')$ gilt:

$$m_{02} + m_{20} = 1$$

m_{20} : Varianz in x-Richtung

m_{02} : Varianz in y-Richtung

Schritt 3 Drehung
suche α , so daß

$$\tan(2\alpha) = 2 \frac{m_{11}}{m_{20} - m_{02}}$$

wobei aus den vier Lösungen diejenige ausgesucht wird, für die das um α rotierte Muster folgende Ungleichungen erfüllt sind:

1. $m_{20} < m_{02}$
2. $m_{21} > 0$

(wobei das die Momente der bereits um α rotierten Muster sind)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ h(x', y') &= f(x', y') \\ \Rightarrow m_{11} &= 0 \end{aligned}$$

das bedeutet, daß die x und y Koordinaten maximal dekorreliert sind

4.2 Normierung

Schritt 4 Spiegelung an der y -Achse, so daß $m_{12} > 0$

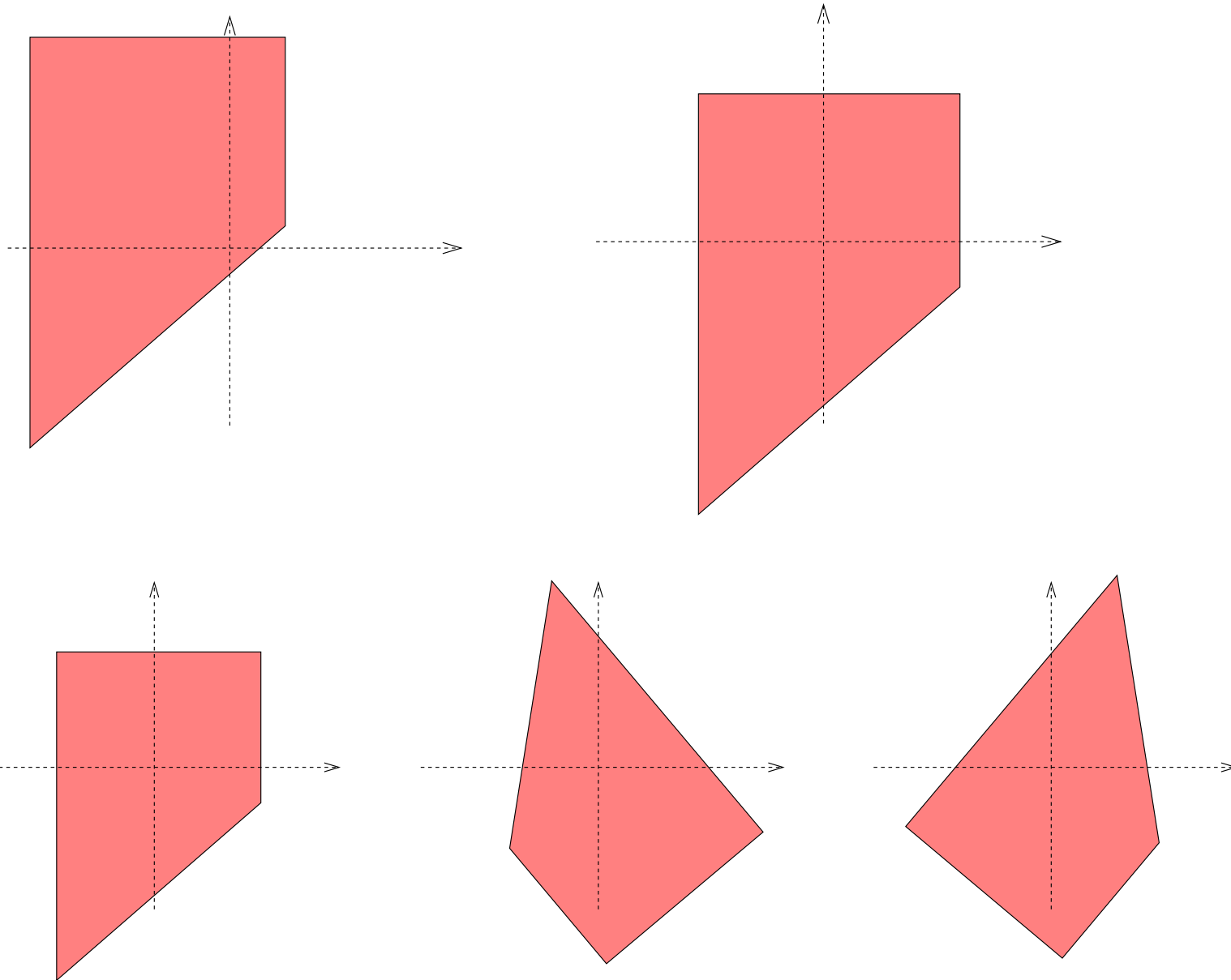
$$\beta = \begin{cases} -1 & m_{12} \leq 0 \\ 1 & m_{12} > 0 \end{cases}$$

$$x' = \beta x$$

$$y' = y$$

$$\Rightarrow m_{12} > 0$$

4.2 Normierung



4.3 Anwendung von linearen Systemen

4.3.1 Lineare System

wir betrachten lineare Systeme (diskrete Form):

$$[f] \rightarrow \boxed{\mathbf{T}} \rightarrow [g] = T \{[f]\}$$

Definition eine Transformation T heißt linear, wenn für alle Folgen $[f]$ und $[g]$ und alle Skalare a und b gilt:

$$T \{a \cdot [f] + b \cdot [g]\} = a \cdot T \{[f]\} + b \cdot T \{[g]\}$$

Definition die Impulsantwort $[g_\mu]$ eines linearen Systems ist definiert als

$$[g_\mu] := T \{[\delta_\mu]\}$$

wobei $[\delta_\mu]$ der Einheitsimpuls an der Stelle μ ist, d.h. eine Folge, die an der Position μ eine 1 hat, sonst nur Nullen

4.3 Anwendung von linearen Systemen

Definition ein lineares System T heißt verschiebungsinvariant, falls für alle j und μ gilt:

$$g_\mu[j] = g_0[j - \mu]$$

(d.h. $[g_\mu]$ entsteht aus $[g_0]$ durch Verschiebung um μ Positionen)

$[g_0]$ heißt dann Impulsantwort $[g]$ von T

Definition die Faltung $[h] = [f] * [g]$ zweier Folgen $[f]$ und $[g]$ ist gegeben als:

$$h[j] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f[k] \cdot g[j - k]$$

Satz für jedes verschiebungsinvariante lineare System T mit der Impulsantwort $[g]$

$$T \{[f]\} = [f] * [g]$$

Satz jedes verschiebungsinvariante lineare System T ist durch seine Impulsantwort $[g]$ eindeutig bestimmt

4.3.2 Diskrete Fouriertransformation

Definition die diskrete Fouriertransformation (DFT)

einer endlichen 2-dimensionalen, diskreten Funktion $f_{jk} = f(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta y)$ für $0 \leq j < M_x, 0 \leq k < M_y$ ist definiert als:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{M_x-1} \sum_{k=0}^{M_y-1} f_{jk} e^{-2i\pi \left(\frac{j\mu}{M_x} + \frac{k\nu}{M_y} \right)}$$

Die Inverse ist gegeben mit:

$$f_{jk} = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{\nu=0}^{M_x-1} \sum_{\mu=0}^{M_y-1} F_{\mu\nu} e^{2i\pi \left(\frac{j\mu}{M_x} + \frac{k\nu}{M_y} \right)}$$

Interpretation für periodisch fortgesetzte Folge wie Fouriertransformation

4.3 Anwendung von linearen Systemen

Definition die zyklische Faltung h_{jk} zweier endlicher, 2-dimensionaler, diskreter Funktionen f_{jk} und g_{jk} ist definiert als ($h = f * g$):

$$h_{jk} = \sum_{l=0}^{M_x-1} \sum_{m=0}^{M_y-1} f_{l,m} \cdot g_{j-l \bmod M_x, k-m \bmod M_y}$$

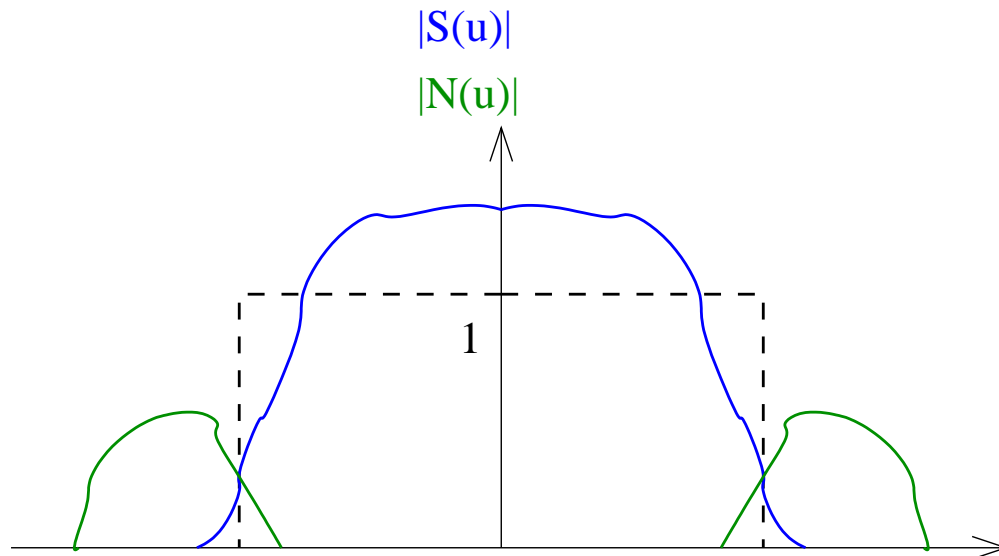
Faltungssatz

für endliche Folgen f, g, h mit $h = f * g$
und deren DFTs F, G, H gilt:

$$H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cdot G_{\mu\nu}$$

4.3.3 Tiefpaßfilter

- Annahme: $\vec{f} = \vec{s} + \vec{n}$ (Signal \vec{s} , Störung \vec{n})
- Störungen reduzieren über Betrachtung/Annahmen der Frequenzeigenschaften von Signal und Störung, z.B.



idealer Tiefpaß kontinuierlich:

- mit realen Bauteilen nicht realisierbar

diskret:

- ringing
- negative gefilterte Abtastwerte möglich

Alternative (als Tiefpaß): Gaußglocke

- kein idealer Frequenzgang
- kein ringing

Bemerkung

- wir können auch andere Frequenzen unterdrücken, z.B. Hochpaß (“wichtige” Eigenschaften hervorheben)
- wir können genauso andere lineare Filter durch *Frequenzgang* definieren
- wir haben auch gesehen, daß wir analog im Frequenzraum oder Zeit-/Ortsraum falten können

Mittelung (als Tiefpaß)

$$h_{jk} = \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=-m}^m \sum_{\nu=-n}^n f_{j+\mu, k+\nu}$$

Frequenzgang (1D): schlecht!

Mittelung über mehrere Perioden, wenn mehrere Realisierungen des Musters vorliegen

$$h_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{\rho=1}^N f_{jk}^{\rho}$$

gut z.B. für EEG, Motorgeräusche

4.3.4 Weitere Anwendungen

Numerische Differentiation

1. Ableitung in X-Richtung:

$${}^x f_{jk} = f_{jk} - f_{j-1,k}$$

1. Ableitung in Y-Richtung:

$${}^y f_{jk} = f_{jk} - f_{j,k-1}$$

Problem:

- nicht symmetrisch um j, k

Betrag des Gradienten:

$$h_{jk} = \sqrt{{}^x f_{jk}^2 + {}^y f_{jk}^2}$$

oder

$$h_{jk} = |{}^x f_{jk}| + |{}^y f_{jk}|$$

Diskreter Laplace Operator

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

diskret:

$$g_{jk} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$