8 Multi-Layer-Perzeptron (MLP)

8.1 Modellneuron

jedes künstliche neuronale Netz besteht aus verschalteten Modellneuronen

- jedes Neuron hat Eingangsvektor $\vec{x}$,
- der mit Gewichtsvektors $\vec{w}$ zum Aktivierungszustand h multipliziert wird:

$$v = \vec{x}^T \vec{w}$$

- die Anwendung der Aktivierungsfunktion σ, die von einem Schwellwert oder bias θ abhängt, führt zur Ausgabe y

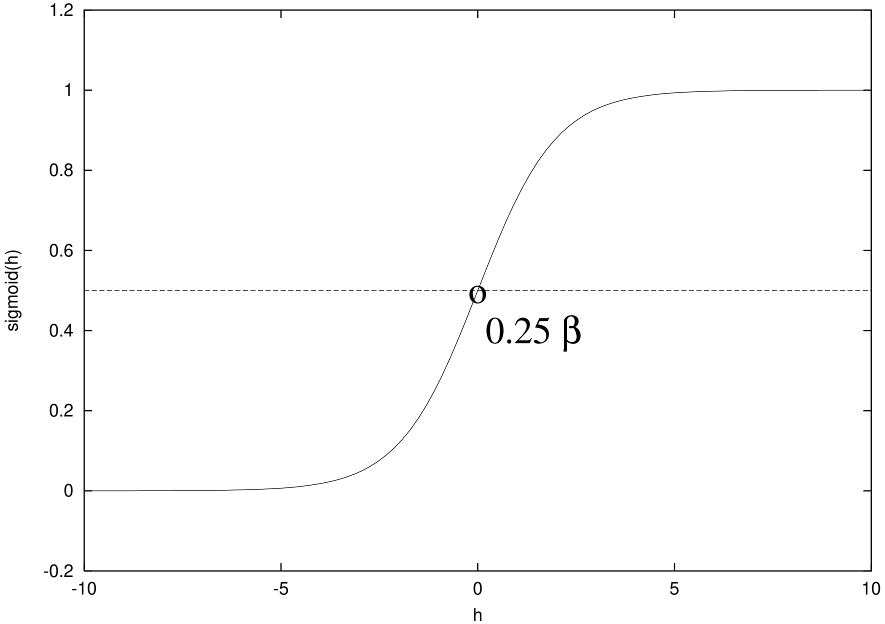
$$y = \sigma\left(h - \theta\right) = \sigma\left(\vec{x}^T \vec{w} - \theta\right) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{N} w_j x_j - \theta\right) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{N} w_j x_j\right)$$

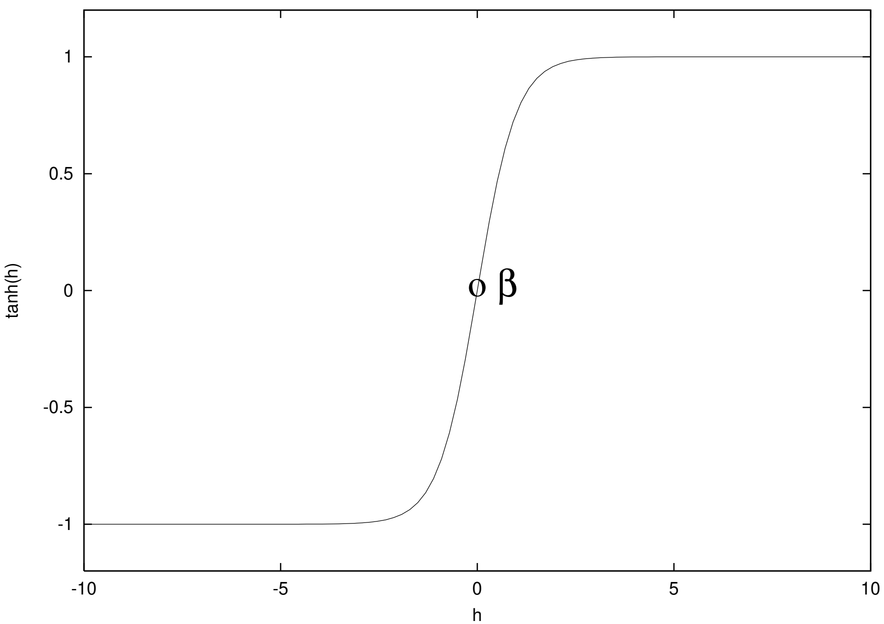
mit $w_0 = \theta$ und $x_0 = -1$

- typische Aktivierungsfunktionen

$$\sigma(h) = \frac{1}{1+e^{-\beta(h-\theta)}} \qquad \sigma'(h) = \beta \cdot \sigma(h) \cdot (1-\sigma(h))$$

$$\sigma(h) = \text{tanh}(\beta(h-\theta)) \quad \sigma'(h) = \beta \cdot (1-\sigma(h)^2)$$





  - β bestimmt Steilheit (maximal $\frac{1}{4}\beta$ bzw. β)
  - θ verschiebt die Kurve

8.2 Architektur eines MLP

ein MLP ist ein mehrschichtiges vorwärtsgekoppeltes Netzwerk.

- jede der $l = 1 \ldots L$ Schichten besteht aus M^l Modellneuronen
- jedes Neuron i einer Schicht l
  - erhält den gleichen Eingangsvektor $\vec{x}^l$
  - besitzt die Gewichtskoeffizienten $\vec{w}_i^l$
  - berechnet einen Ausgangswert

$$y_i^l = \sigma \left(\sum_{j=0}^{M^{l-1}} w_{ij}^l \cdot x_j^l \right) = \sigma \left(\vec{w}_i^{l^T} \vec{x}^l \right)$$

- Zusammenfassung einer Schicht

$$\vec{y}^l = \vec{\sigma} \left(\underline{W}^{l^T} \vec{x}^l \right) \text{ , mit } \underline{W}^l := \left(\vec{w}_1^l, \ldots \vec{w}_{M^l}^l \right)$$

- der Ausgabevektor der Schicht l dient als Eingangsvektor der nächsten

$$\vec{x}^{l+1} := \vec{y}^l \text{ , wobei } x_0^{l+1} = -1$$

8.3 Einsatz der MLPs zur Musterklassifikation

- erweitere Merkmalsvektor $\vec{c}$ um eine Komponente als Eingangsvektor der ersten Neuronenschicht benutzt: $\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \vec{c} \end{pmatrix}$
- MLP als Funktionsapproximator für die Unterscheidungsfunktion: $\vec{d}\,(\vec{c}) = \vec{y}^L$
- letzte Schicht besitzt also genau K (Anzahl der Klassen) Neuronen
- Entscheidungsregel analog zum Polynomklassifikators:
  $g(\vec{c}) = e(\vec{d}(\vec{c})) = \omega_l, \quad$ falls l *maximale* Komponente von $\vec{d}(\vec{c})$
- Parameteroptimierung mit gleichen Kriterien wie beim Polynomklassifikator: bestimme die $\vec{w}_i^l$ mit minimalem mittleren quadratischen Fehler:

$$S^2\left(\underline{W}^1, \ldots, \underline{W}^L\right) = E\left\{\left(\vec{y} - \vec{y}^L(\vec{c})\right)^2\right\}$$

- es existiert keine geschlossene Lösung wie beim Polynomklassifikator
  Optimierung deshalb mit Gradientenabstieg für ein Stichprobenelement $\vec{c}$ mit Zielvektor $\vec{y}$:

$$E(\vec{c}) = \left(\vec{y} - \vec{a}^L\,(\vec{c})\right)^2$$

- Berechnung der partiellen Ableitung $\frac{d,E(\vec{c})}{dw_{ij}^l}$ führt auf **Rückpropagierung** (**back propagation**) des Fehlers beginnen bei der Ausgabeschicht

$$\delta_i^l := \begin{cases} (y_i - y_i^L)\sigma'(h_i^L) & l = L \\ \left(\sum_{k=1}^{M^{l+1}} \delta_k^{l+1} w_{ki}^{l+1}\right) \sigma'(h_i^l) & \text{sonst} \end{cases}$$

  damit Ändern der Gewichte:

$$\Delta w_{ij}^l := \epsilon\ \delta_i^l\ y_j^{l-1}$$

  mit der Lernschrittweite ϵ

- iteriertes Trainingsverfahrens über die Elemente der Stichprobe, wobei i.d.R. ϵ im Lauf der Iteration monoton abfällt

Bemerkungen

1. das einschichtige Perzeptron ($L = 1$) ist identisch mit dem Polynomklassifikator vom Grad 1
   (Aktivierungsfunktion σ ändert die Entscheidung nicht)
2. die nicht-lineare Aktivierungsfunktion σ ist entscheidend für die Leistungsfähigkeit des MLP, da es sonst linear wird
   $$\vec{d}(\vec{c}) = \underline{W}^{L^T} \ldots \underline{W}^{1^T} \vec{x} = \underline{\tilde{W}} \vec{x}$$
3. auch das MLP ist ein universeller Funktionsapproximator,
   mit mindestens einer versteckten Schicht ($L > 1$) und genügend Neuronen
   hierbei werden (im Gegensatz zum Polynomklassifikator) **datenabhängige** Basisfunktionen verwendet, die in den versteckten Schichten berechnet werden
4. bei unserem Optimierungskriterium und Zielvektor gilt:
   MLP schätzt die a posteriori Wahrscheinlichkeit, d.h.
   $$y_i^L \sim p(\omega_i \mid \vec{c})$$
   (dies folgt letztlich aus dem allgemeinen Resultat des Quadratmittelansatzs)