Prof. Dr. Stefan Posch **Universität Halle**
Denis Williams **Institut für Informatik**

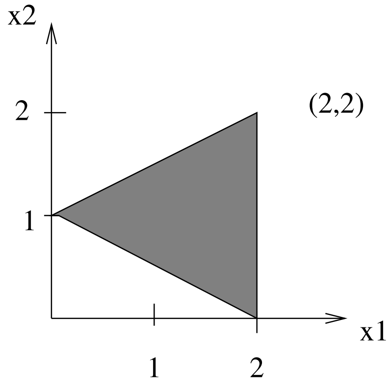
Übungen Neuronale Netze
Wintersemester 2001/02
Blatt 3

Aufgabe 3.1

Drei Schwellwertneuronen erhalten einen identischen zweidimensionalen Eingabevektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Die Ausgabe der Neurone ist gegeben durch $y_i = \Theta((1, x_1, x_2) \cdot \vec{w}_i)$

(a) Bestimmen Sie geeignete Gewichtsvektoren $\vec{w}_i$, so dass genau für Eingabevektoren $\vec{x}$ innerhalb des grauen Dreiecks alle drei Neuronen aktiv sind, für alle anderen Eingaben mindestens ein Neuron inaktiv ist.

(b) Fügen Sie ein weiteres Schwellwertneuron hinzu, dessen drei Eingabewerte die Aktivitäten $y_i, i = 1, 2, 3$ sind. Wie muss dessen Gewichtsvektor gewählt werden, damit es genau dann reagiert, wenn der Eingabevektor $\vec{x}$ innerhalb des grauen Dreiecks liegt?



Aufgabe 3.2

Durch eine Sägevorrichtung laufen Platten aus zwei unterschiedlichen Materialien: Material 1 ergibt ein lautes Sägegeräusch von gut definiertem Pegel. Material 2 erzeugt ein leises Sägegeräusch, jedoch sind die Pegelschwankungen größer als bei Material 1. Für die Unterscheidung der beiden Materialien soll ein Geräuschsensor eingesetzt werden, dessen Ausgangssignal zur Lautstärke des Sägegeräusches proportional ist. Die Verteilungen der Lautstärken für Material 1 und 2 seien statistisch durch zwei Wahrscheinlichkeitsdichten

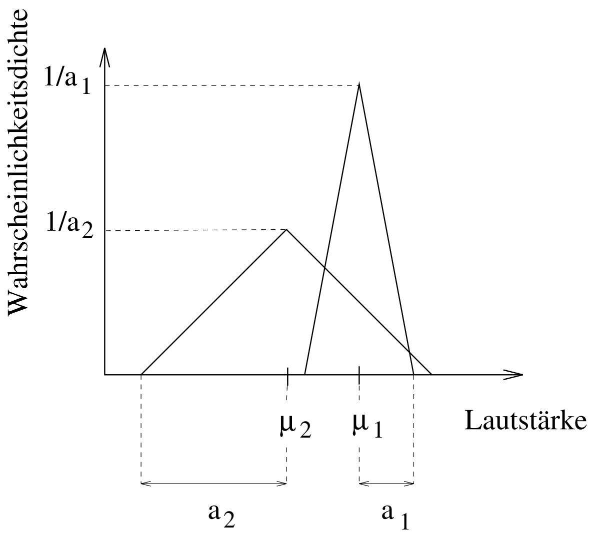
$$P_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_i} - \frac{|x-\mu_i|}{a_i^2} & \text{für} \quad |x - \mu_i| \leq a_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(i = 1, 2)$ gegeben (siehe Abbildung).

Material 1 komme doppelt so häufig vor wie Material 2, und es sei $a_1 = 0.2,\ \mu_1 > \mu_2,\ \mu_2 = 2,\ a_2 = 1$.
Betrachten Sie die Klassifikation mittels einer Schwellwertfunktion

$$y = \Theta(x - w_0)$$

und diskutieren Sie die Fehlerrate, d.h. die Wahrscheinlichkeit einer Fehlklassifikation, in Abhängigkeit der Parameter μ_1 und w_0.



Aufgabe 3.3

Gegeben sei ein Perzeptron $y_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} w_{ij} x_i$ mit drei Gewichtsvektoren

$$\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}),\ i = 1, \ldots, 3.$$

Wie teilt ein solches Perzeptron den Raum R^2 in Regionen bestimmter Klassenzugehörigkeit ein (Form der Klassengebiete)? Wie sieht die Situation für ein Perzeptron mit Bias aus? In diesem Fall gilt: $\vec{x} = (1, x_1, x_2)$ und $\vec{w}_i = (w_{i0}, w_{i1}, w_{i2})$.

Aufgabe 3.4

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte Klassifikationsproblem im R^2. Jedes Symbol markiert ein Paar von Merkmalen, die entsprechend den Symbolen in zwei Klassen eingeteilt werden sollen.

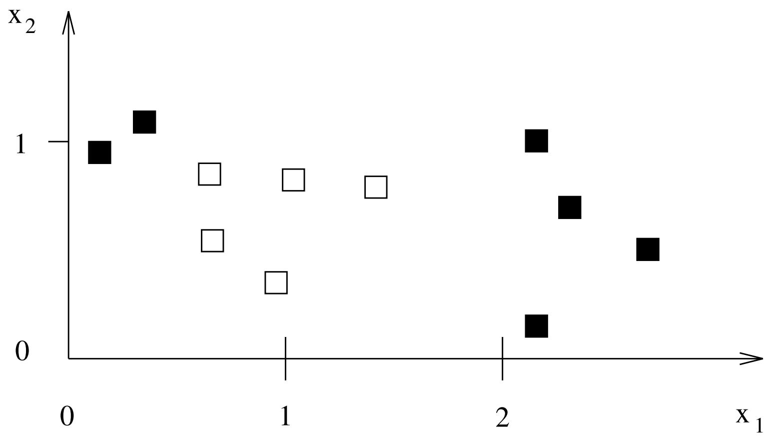


Abb.1

(a) Begründen Sie genau, warum die in Abb. 1 dargestellten Klassen bezüglich der Merkmalsvektoren $\vec{x} = (1, x_1, x_2)^T$ nicht linear separabel sind.

(b) Was ergibt sich, wenn Sie dieselben Punkte durch die höherdimensionalen Merkmalsvektoren $\vec{x} = (1, x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x_3 = x_1^2$ beschreiben? Bestimmen Sie die Koeffizienten eines Perzeptrons, das die Klassifikationsaufgabe löst, und zeichnen Sie die zugehörige Trennlinie in der x_1-x_3-Ebene.

Aufgabe 3.5

Betrachten Sie alle möglichen booleschen Funktionen f von zwei Variablen, also

$$f : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}.$$

(a) Welche dieser Funktionen sind mit einem Perzeptron berechenbar?

(b) Geben Sie ein Perzeptron an, das die AND- bzw. die OR-Funktion berechnet.

(c) Beweisen Sie: Die XOR-Funktion von zwei booleschen Variablen x_1 und x_2 kann nicht mit einem einzigen Perzeptron berechnet werden.