$$
\boxed{\begin{aligned}
C_{jk}^{(t+1)} &= \frac{N_{jk}^{(t)}}{\sum_{\tilde{k}=1}^{S} N_{j\tilde{k}}^{(t)}} \\
e_{ja}^{(t+1)} &= \frac{M_{ja}^{(t)}}{\sum_{\tilde{a}=1}^{A} M_{j\tilde{a}}^{(t)}} \\
b_{j}^{(t+1)} &= \sum_{\substack{\vec{u}\in\mathcal{U}: \\ u_1=j}} P(\vec{u}|\vec{x},\vec{\theta}^{(t)})
\end{aligned} \qquad (27)}
$$

Bei der Neuschätzung der b_j ist keine Normierung erforderlich! (die $\sum_{\substack{\vec{u}\in\mathcal{U}: \\ u_1=j}} P(\vec{u}|\vec{x},\vec{\theta}^{(t)}$ muß ja auf ein summieren)

Für die effiziente Berechnung dieser Gleichungen können die ξ's des forward-backward-Algorithmus nutzen, wie wir für die $N_{jk}^{(t)}$ ausführen:

Dafür werden wir gleich benötigen:

$$
\begin{aligned}
&P(U_l = j, U_{l+1} = k|\vec{U} = \vec{u}, \vec{X} = \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \\
&\qquad = P(U_l = j, U_{l+1} = k|\vec{U} = \vec{u}) \qquad \text{da } \vec{U} \text{ die ZV } U_l \text{ und } U_{l+1} \text{ von } \vec{X} \text{ und } \vec{\theta}^{(t)} \text{ separiert} \\
&\qquad = \begin{cases} 1 & \text{falls } U_l = u_l = j \wedge U_{l+1} = u_{l+1} = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned} \qquad (28)
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{L-1} \xi_{jk}(l)^{(t)} &= \sum_{l=1}^{L-1} P(U_l = j, U_{l+1} = k | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \qquad \text{nach Def. von } \xi \\
&= \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{\vec{u} \in \mathcal{U}} P(U_l = j, U_{l+1} = k, \vec{u} | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \qquad \text{Marginalisierung über alle } \vec{u} \in \mathcal{U} \\
&= \sum_{\vec{u} \in \mathcal{U}} \sum_{l=1}^{L-1} P(U_l = j, U_{l+1} = k | \vec{u}, \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) P(\vec{u} | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \qquad \text{Bayes, Summen vertauschen} \\
&= \sum_{\vec{u} \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{L-1} \underbrace{P(U_l = j, U_{l+1} = k | \vec{u})}_{\in \{0,1\} \text{ s.oben}} \right)}_{\text{Summe über alle möglichen Übergänge in } \vec{u}, \text{ wir zählen die Auftrefen von } j \to k \text{ in } \vec{u}} P(\vec{u} | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \\
&= \sum_{\vec{u} \in \mathcal{U}} n_{jk}(\vec{u}) P(\vec{u} | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) \\
&= N_{jk}^{(t)}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Mit einer analoger Ableitung für die $M_{ja}^{(t)}$ und direktes Ausnutzen der Definition der $\xi_j(1)^{(t)}$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
N_{jk}^{(t)} &= \sum_{l=1}^{L-1} \xi_{jk}(l)^{(t)} \\
M_{ja}^{(t)} &= \sum_{\substack{l=1: \\ x_l = a}}^{L} \xi_j(l)^{(t)} \\
\sum_{\substack{\vec{u} \in \mathcal{U}: \\ u_1 = j}} P(\vec{u} | \vec{x}, \vec{\theta}^{(t)}) &= \xi_j(1)^{(t)}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Dies ist also genau die Stelle, wo wir durch den Forward-Backward-Algorithmus effizient die Summation über die exponentiell vielen Pfade zum Generieren der Beobachtung $\vec{x}$ umgehen.