



## Blatt 2

### Aufgabe 2.1

(10 Punkte)

Der Datensatz `coin` enthält 100 Binärsequenzen der Länge  $L = 10$ , die durch ein Mischmodell zweier homogener Markov Modelle nullter Ordnung generiert wurden. Hierbei stehen  $Z$  für Zahl und  $W$  für Wappen. Die beiden Klassenwahrscheinlichkeiten  $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$  sind extern vorgegeben. Die einzigen zu schätzenden Parameter dieses Modells sind die Wahrscheinlichkeiten  $q_1$  und  $q_2$  der beiden Münzen 1 und 2, Zahl zu werfen. Die A-Priori-Dichte von  $q_1$  und  $q_2$  ist ein Produkt zweier Beta-Dichten,  $P(q_1)$  und  $P(q_2)$ , mit Hyperparametern

- (a) (1, 1) und (1, 1),
- (b) (1, 1) und (10, 10),
- (c) (10, 10) und (1, 1),
- (d) (10, 10) und (10, 10),
- (e) (1, 10) und (1, 10),
- (f) (1, 10) und (10, 1),
- (g) (10, 1) und (1, 10),
- (h) (10, 1) und (10, 1).

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben (außer 2.1 (k)) für jede der acht A-Priori-Dichten.

- (a) Formulieren Sie die A-Priori-Annahme verbal.
  - (b) Plotten Sie den Logarithmus der A-Priori-Dichte als Funktion von  $q_1$  und  $q_2$ .
  - (c) Vergleichen Sie die acht Plots, und diskutieren Sie die Unterschiede. Formulieren Sie Ihre Vermutungen, in welche Richtung die verschiedenen A-Priori-Dichten die MAP-Schätzung der Parameter  $q_1$  und  $q_2$  beeinflussen werden.
  - (d) Schätzen Sie die Parameter  $q_1$  und  $q_2$  mittels MAP-Prinzip unter Nutzung der gegebenen Klassenzugehörigkeiten.
  - (e) Vergleichen Sie die acht verschiedenen Schätzwerte, und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Vermutungen.
-

- (f) Ignorieren Sie für die folgenden Teilaufgaben die Klassenzugehörigkeiten, d. h. betrachten Sie die Klassenzugehörigkeiten aus `coin` im folgenden als nicht gegeben. Plotten Sie den Logarithmus der A-Posteriori-Dichte als Funktion von  $q_1$  und  $q_2$ .
- (g) Vergleichen Sie die acht Plots, und diskutieren Sie die Unterschiede.
- (h) Bestimmen Sie die Maxima und Maximalstellen dieser Funktion mit geringem Aufwand durch ein Verfahren Ihrer Wahl (gitterbasierte Abrasterung, Maximumssuche per Auge, Gradientenanstieg, etc.).
- (i) Vergleichen Sie die acht verschiedenen Schätzwerte, und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Vermutungen.
- (j) Vergleichen Sie die Maximalstellen mit den in Aufgabe 2.1 (d) geschätzten Werten, und diskutieren Sie die Unterschiede.
- (k) Versuchen Sie, die Maximalstellen analytisch zu bestimmen, indem Sie die A-Posteriori-Dichte (oder deren Logarithmus) nach  $q_1$  und  $q_2$  ableiten und beide Ableitungen Null setzen. Worin liegt das Problem, dieses Gleichungssystem (mit lediglich zwei Gleichungen und zwei Unbekannten) analytisch zu lösen?

**Abgabetermin: 7. November**

---