



Blatt 8

Aufgabe 8.1

(2 Punkte)

Beweisen Sie die Likelihood-Äquivalenz des Links-Rechts- und des Rechts-Links-Markovmodells erster Ordnung.

Aufgabe 8.2

(2 Punkte)

Ihr Bürokollege erhält einen Anruf von seiner Frau, die er zur Entbindung ins Krankenhaus begleiten möchte, und bittet Sie, seine gerade gewonnenen Ergebnisse seinen Hausbiologen mitzuteilen. Die Zeit zwischen Tür und Angel reicht gerade noch aus, Ihnen die Telefonnummer seiner Kooperationspartner mitzuteilen und Ihnen zu verraten, dass es in der Studie um Spleißdonorstellen der Länge $L = 7$ bp geht. Im Gehen ruft er Ihnen noch zu, dass sich die Donorstellen adäquat durch ein inhomogenes Markovmodell erster Ordnung im Raum der Purin-Pyrimidin-Sequenzen repräsentieren lassen und dass die Modellparameter gerade auf seinem Bildschirm zu sehen sind. Die Tür klappt zu, und Sie sind allein.

Sie kommen sofort mit dem Output auf dem Bildschirm zurecht¹ und erkennen, dass Ihr Kollege ein Rechts-Links-Markovmodell gelernt hat. Sie rufen die Kooperationspartner an und erfahren, dass sie sich über die Ergebnisse sehr freuen und gern noch heute die Modellparameter, aber selbstverständlich der entsprechenden Links-Rechts-Modelle, erhalten möchten.

Die Parameter des Rechts-Links-Modells, die Sie auf dem Bildschirm Ihres Kollegen sehen, sind $P(X_7 = R) = 0.5$ und für alle anderen Positionen $i = 1, \dots, 6$ erstaunlicherweise gleiche Werte $P(X_\ell = R | X_{\ell+1} = R) = 0.81$, $P(X_\ell = R | X_{\ell+1} = Y) = 0.28$. Wie lauten die Parameter des entsprechenden Links-Rechts-Modells, d. h. wie lauten der Startwahrscheinlichkeitsvektor $P(X_1)$ und die sechs Übergangsmatrizen $P(X_\ell | X_{\ell-1})$ für $\ell = 2, \dots, 7$?

Aufgabe 8.3

(4 Punkte)

Wir betrachten ein inhomogenes Markovmodell erster Ordnung und nehmen als A-Priori-Dichte der Parameter des Links-Rechts-Modells ein Produkt aus Dirichlet-Dichten (wie in der Vorlesung gegeben) mit einer *equivalent sample size* ϵ und ansonsten gleichverteilten Hyperparametern an. Leiten Sie für $L = 3$ und $A = 2$ die entsprechende A-Priori-Dichte der Parameter des Rechts-Links-Modells her. Wie lau-

¹Spätestens an dieser Stelle wird die Handlung fiktiv.

tet die A-Posteriori-Dichte der Parameter des Rechts-Links-Modells? Wie lautet der MAP-Schätzer der Parameter des Rechts-Links-Modells?

Aufgabe 8.4

(2 Punkte)

Auf der Webseite der Vorlesung finden Sie 100 Spleißdonorstellen der Länge $L = 7$ bp (nicht zu verwechseln mit denen Ihres Kollegen aus Aufgabe 8.2).

Wie lauten die ML-Parameter des Links-Rechts- und des Rechts-Links-Markovmodells, und wie lauten die beiden maximalen Loglikelihoods?

Nehmen Sie nun als A-Priori-Dichte ein Produkt aus Dirichlet-Dichten (wie in der Vorlesung gegeben) mit einer *equivalent sample size* $\epsilon = 32$ und ansonsten gleichverteilten Hyperparametern an. Wie lauten die MAP-Parameter des Links-Rechts- und des Rechts-Links-Markovmodells, und wie lauten die beiden maximalen A-Posteriori-Dichten? Sind sie gleich?

Aufgabe 8.5

(2 Punkte)

Besuchen Sie zwei Ihrer Freunde, für die Sie im letzten halben Jahr keine Zeit hatten, und lassen Sie sich die Besuche nicht bestätigen.

Aufgabe 8.6

(10 Punkte)

Drei Zusatzaufgaben zu Aufgabe 8.3: Leiten Sie die entsprechende A-Priori-Dichte der Parameter des Rechts-Links-Modells für beliebiges L und/oder beliebiges A her. Wie lautet die A-Posteriori-Dichte der Parameter des Rechts-Links-Modells, und wie lautet der MAP-Schätzer?

Abgabetermin: 9. Januar

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein glückliches und erfolgreiches neues Jahr!